



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

## Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

## Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.



























1-11

2000  
05/04





# **J a h r b u c h**

über die

## **Fortschritte der Mathematik**

im Verein mit anderen Mathematikern

und unter besonderer Mitwirkung der Herren

**Felix Müller und Albert Wangerin**

herausgegeben

von

**Carl Ohrtmann.**

**Dreizehnter Band.**

**J a h r g a n g 1881.**

---

**Berlin.**

Druck und Verlag von G. Reimer.

1883.

- Astr. Viertschr.:* Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Herausgegeben von E. Schoenfeld in Bonn, A. Winnecke in Strassburg i. E. Leipzig. W. Engelmann. 8°.
- Bair. Bl.:* Blätter für das bairische Gymnasial- und Realschulwesen, redigirt von W. Bauer und A. Kurz. München. 8°.
- Batt. G.:* Giornale matematico ad uso degli studenti delle università italiane pubblicato per cura del Prof. G. Battaglini. Napoli. gr. 8°.
- Belg. Ann.:* Annuaire de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. F. Hayez.
- Belg. Ann.:* Annales de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles.
- Belg. Bull.:* Bulletin de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. 8°.
- Belg. Mém. C.:* Mémoires couronnés de l'Académie Royale de Belgique. Bruxelles. 4°.
- Belg. M. N.:* Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale de Belgique. Bruxelles. 4°.
- Berl. Abh.:* Mathematisch-physikalische Abhandlungen der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 4°.
- Berl. Monatsber.:* Monatsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 8°.
- Bibl. un.:* Bibliothèque universelle et revue suisse. Archives des sciences physiques et naturelles. Lausanne. Bridel.
- Bologna Mem.:* Memorie dell' Accademia Reale di scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna. 4°.
- Bologna Rend.:* Rendiconti dell' Accademia Reale di scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna.
- Bonc. Bull.:* Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni. Roma. 4°.
- Bord. Mém.:* Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles à Bordeaux. Bordeaux. Paris. 8°.
- Brioschi Ann.:* Annali di matematica pura ed applicata diretti da F. Brioschi e L. Cremona in continuazione degli Annali già pubblicati in Roma dal Prof. Tortolini. Milano. 4°.
- Brit. Ass. Rep.:* Reports of the meeting of the British Association for the advancement of science. London. gr. 8°.
- Brux. Ann.:* Annales de l'Observatoire Royal de Bruxelles, publiées aux frais de l'État. Bruxelles. F. Hayez. 4°.
- Brux. S. sc.:* Annales de la société scientifique de Bruxelles. Bruxelles. F. Hayez. (Doppelt paginirt, unterschieden durch A und B.).
- Cambr. Proc.:* Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge.
- Cambr. Trans.:* Transactions of the Philosophical Society of Cambridge. Cambridge.
- Carl Rep.:* Repertorium für Experimental-Physik, herausgegeben von Ph. Carl. München. gr. 8°.
- Cas :* Casopis; Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und Physik, redigirt mit besonderer Rücksicht auf Studierende der Mittel- und Hochschulen von F. J. Studnička, herausgegeben vom Vereine böhmischer Mathematiker in Prag. Prag. 8°. (Böhmisch).
- f. Forstw.:* Centralblatt für das gesammte Forstwesen.

























	Seite
J. König. Zur Theorie der Resolventen . . . . .	86
Faà de Bruno. Einleitung in die Theorie der binären Formen . .	86
M. Nöther. Beiträge zur Theorie der binären Formen . . . . .	86
Faà de Bruno. Trois notes sur la théorie des formes . . . . .	90
E. B. Christoffel. Bemerkungen zur Invariantentheorie . . . . .	90
C. Stéphanos. Sur les faisceaux de formes binaires . . . . .	92
J. C. Malet. On a class of invariants . . . . .	93
G. Bernardi. Sopra le proprietà generali degli invarianti e dei covarianti . . . . .	94
C. Le Paige. Note sur certains covariants; nebst Bericht von F. Folie . . . . .	94
J. Petersen. Om binære Formers Kovarianter . . . . .	94
A. Capelli. Sopra un problema di partizione . . . . .	95
Th. Pepin. Sur la classification des formes quadratiques bi- naires . . . . .	98
C. Le Paige. Sur les formes binaires à plusieurs séries de variables; nebst Bericht von F. Folie . . . . .	98
A. Cayley. Specimen of a literal table for binary quantics . . . .	98
C. Le Paige. Sur l'invariant du dix-huitième ordre des formes binaires du cinquième degré . . . . .	99
J. J. Sylvester. Sur les covariants irréductibles du quantic binaire du huitième ordre . . . . .	100
J. J. Sylvester. Demonstration of the impossibility of the binary octavic possessing any groundform of deg-order 10. 4. . . . .	100
J. J. Sylvester. Tables of the generating functions and ground- forms of the binary duodecimic . . . . .	100
F. Brioschi. Il resultante di due forme binarie l'una cubica e l'altra biquadratica . . . . .	102
F. Brioschi. Sopra una forma binaria dell' ottavo ordine . . . . .	103
C. Le Paige. Sur le déterminant fonctionnel d'un nombre quelconque de formes binaires . . . . .	104
G. Battaglini. Sulle forme ternarie bilineari . . . . .	104
F. R. Scherrer. Ueber ternäre biquadratische Formen . . . . .	105
A. Cayley. On the 34 concomitants of the ternary cubic . . . . .	107
C. Le Paige. Sur une propriété des formes trilineaires . . . . .	108
C. Le Paige. Sur la théorie des formes trilineaires . . . . .	108
Schubert. Die trilineare Verwandtschaft zwischen drei einstufigen Grundgebilden . . . . .	108
G. Maisano. Sistemi completi dei primi 5 gradi della forma ternaria biquadratica . . . . .	110
G. Battaglini. Sulle cubiche ternarie sizigetiche . . . . .	111
J. J. Sylvester, H. Stabenow, W. J. C. Sharp. Lösungen von Aufgaben über specielle Formen . . . . .	114

### Capitel 3. Elimination und Substitution. Determinanten, symmetrische Functionen.

L. Kronecker. Zur Theorie der Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen . . . . .	114
L. Kronecker. Auszug aus einem Briefe . . . . .	114
H. G. Zeuthen. Bestemmelse af største folles Faktor til Polynomier ved Determinanter . . . . .	117
L. Saltel. Contribution à la théorie de la substitution des systèmes d'équations . . . . .	118
A. Grandi. Un teorema sulla rappresentazione analitica delle sostituzioni sopra un numero primo di elementi . . . . .	118
De Polignac. Sur la représentation analytique des substitutions .	119

















	Seite
G. Halphén. Sur des fonctions qui proviennent de l'équation de Gauss . . . . .	266
E. Goursat. Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique . . . . .	267
A. Cayley. On a differential equation . . . . .	272
G. Darboux. Sur l'équation de Riccati . . . . .	273
J. W. L. Glaisher. On Riccati's equation . . . . .	274
N. Herz. Ueber Integrale einiger Differentialgleichungen . . . . .	274
Wolstenholme. Note on linear differential equations with constant coefficients . . . . .	275
B. Hansted. Nogle Transformationer af den lineære Differential-ligning . . . . .	275
R. Rubini. Intorno ad un' assertiva di Boole . . . . .	276
M. Ehrhorn. Ueber die von Challis vorgeschlagene neue Integrationsmethode von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . . . .	276
A. Winckler. Die Integration linearer Differentialgleichungen . . . . .	278
S. Spitzer. Neue Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen . . . . .	278
R. Rubini. Esercizii d'integrazione col calcolo dei simboli d'operazione . . . . .	279
Graefe. Integrale von einigen Differentialgleichungen . . . . .	280
H. J. Sharpe. On a differential equation . . . . .	280. 281
J. Hammond, W. B. Grove, J. Cockle. Solutions of a question. . . . .	281
J. Cockle. On an equation of Schwarz . . . . .	281
J. Cockle. Transformation of differential equations . . . . .	282
G. Rawson. On the first resolvent of a certain quartic . . . . .	282
J. Cockle. Transformation of a biordinal of Schwarz's . . . . .	283
J. Cockle. Supplement on binomial biordinals . . . . .	283
G. Humbert. Sur la fonction $(x-1)^u$ . . . . .	284
J. Cockle. Inverse problem of criticoids . . . . .	284
R. Harley. Supplementary notes on a differential equation . . . . .	284. 285
H. J. Sharpe. On a transcendental differential equation . . . . .	285
v. Schaewen. Anwendung der Differentiation mit gebrochenem Index auf die Integration linearer Differentialgleichungen . . . . .	285
J. J. Sylvester. On the solution of a certain class of difference or differential equations . . . . .	287
G. Dillner. Sur une propriété des produits des $k$ équations différentielles linéaires à coefficients rationnels . . . . .	288
F. Brioschi. Sopra un sistema di equazioni differenziali . . . . .	289
G. Halphén. Sur un système d'équations différentielles . . . . .	289
F. Brioschi. Sur un système d'équations différentielles . . . . .	290
G. Halphén. Sur certaines systèmes d'équations différentielles . . . . .	290

### Capitel 6. Partielle Differentialgleichungen.

L. Tanner. General method of solving partial differential equations . . . . .	292
Alexéeff. Sur l'intégration des équations partielles du premier ordre . . . . .	294
E. Padova. Sulla integrazione delle equazioni a derivate parziali del primo ordine . . . . .	294
P. Mansion. Rectification . . . . .	295
P. Mansion. Sur les équations aux dérivées partielles, nebst Rapport von P. Gilbert . . . . .	295
P. Gilbert. Sur une propriété de la fonction de Poisson, nebst Rapport von Mansion . . . . .	295









	Seite
Christoffel. Algebraischer Beweis des Satzes von der Anzahl der linear unabhängigen Integrale erster Gattung . . . . .	380
P. Appell. Sur une classe de fonctions dont les logarithmes sont des sommes d'intégrales abéliennes . . . . .	382
Th. Craig. Note on Abel's theorem . . . . .	383
A. R. Forsyth. Memoir on the thetafunctions . . . . .	383
Elliot. Sur une classe de fonctions analogues aux fonctions $\theta$ . .	385
B. Baillaud. Formule générale pour le développement de la partie principale de la fonction perturbatrice . . . . .	386
Ch. Hermite. Sur l'intégrale eulérienne de seconde espèce . . . .	387
P. Appell. Sur une classe de fonctions analogues aux fonctions eulériennes . . . . .	388
E. Picard. Sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques .	389
P. Appell. Sur des polynômes de deux variables analogues aux polynômes de Jacobi . . . . .	389
E. Heine. Handbuch der Kugelfunctionen . . . . .	390
H. Bruns. Zur Theorie der Kugelfunctionen . . . . .	391
E. Heine. Ueber die Kugelfunction $P^n(\cos \gamma)$ für ein unendliches $n$	391
K. Heun. Neue Darstellung der Kugel- und verwandten Functionen durch Determinanten . . . . .	392
J. A. Martins da Silva. Sobre a transformação das funções $X_n$ de Legendre . . . . .	393
E. Catalan. Mémoire sur les fonctions $X_n$ de Legendre . . . . .	394
E. Catalan. Sur une suite de polynômes entiers et sur quelques intégrales définies . . . . .	394
L. Schläfli. Ueber die zwei Heine'schen Kugelfunctionen mit beliebigem Parameter . . . . .	395
F. G. Mehler. Ueber eine mit den Kugel- und Cylinderfunctionen verwandte Function . . . . .	399
C. Neumann. Ueber die Mehler'schen Kugelfunctionen . . . . .	399
L. Schläfli. Bemerkungen über die Lamé'schen Functionen . . .	405
F. Klein. Ueber Lamé'sche Functionen . . . . .	406
F. Klein. Ueber Körper, welche von confocalen Flächen zweiten Grades begrenzt sind . . . . .	407
F. Lindemann. Entwicklung der Functionen einer complexen Variabeln nach Lamé'schen Functionen . . . . .	410
G. A. Orlow. Sur la fonction génératrice des polynômes $P_{m,n}$ de Didon . . . . .	415
G. Orloff. Ueber Polynome mit einer und mehreren Veränderlichen	416
E. Beltrami. Sulle funzioni cilindriche . . . . .	417
A. Cayley. On the Schwarzian derivative and the polyhedral functions . . . . .	418

## Achter Abschnitt. Reine, elementare und synthetische Geometrie.

### Capitel 1. Principien der Geometrie.

G. Veronese. Alcuni teoremi sulla geometria a $n$ dimensioni . .	420
W. Kretkowski. Auflösung einer Aufgabe aus der polydimensionalen Geometrie . . . . .	420
R. Hoppe. Ueber den Winkel von $n$ Dimensionen . . . . .	421
R. Hoppe. Berechnung einiger vierdehniger Winkel . . . . .	421
R. Hoppe. Regelmässige linear begrenzte Figuren von vier Dimensionen . . . . .	422







	Seite
E. Hain. Ueber eine Verwandtschaft ersten Grades . . . . .	475
Em Weyr. Ueber die involutorische Lage sich berührender Kegelschnitte . . . . .	475
C. Taylor. On harmonically circumscribed conics . . . . .	476
F. Hofmann. Ueber dreifach berührende Kegelschnitte . . . . .	476
P. Kössler. Entstehung eines Kegelschnittbüschels aus einem Strahlenbüschel . . . . .	476
E. Mahler. Gewisse Systeme von Kegelschnitten, die mit einander projectivisch sind . . . . .	477
F. Bergmann. Kegelschnittbüschel-Constructions . . . . .	478
J. Tesar. Synthetische Untersuchung der gemischten Kegelschnittschaar $S(3l, 1p)$ . . . . .	478
D. Edwardes, Genese, Taylor, Townsend, W. J. C. Sharp, R. F. Davis, G. Eastwood, C. Morgan, G. Turriff, R. E. Riley, R. Knowles, R. Tucker, G. F. Walker, W. B. Grove, C. A. Scott, C. Bickerdike, A. Easton, Ch. Ladd, J. O'Regan, W. H. Harris, W. H. Blythe, T. R. Terry, Wolstenholme, F. Laudiero, Gambey, Moret-Blanc, H. du Montel. Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über Gebilde ersten und zweiten Grades in synthetischer Behandlung . . . . .	479
E. Dewulf. Exercices de géométrie . . . . .	480
J. R. Vaňaus. Ueber die Trisectorie . . . . .	481
A. Ameseder. Ueber Constructionen ebener Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten . . . . .	481
K. Bobek. Ueber die Krümmungsmittelpunkte von gewissen Curven . . . . .	482
S. Roberts. On an immediate generalisation of local theorems in which the generating point divides a variable linear segment in a constant ratio . . . . .	483
S. F. W. Baehr. Note sur une enveloppe . . . . .	483
A. Sucharda. Tangentenconstruction zur Astroide . . . . .	484
Weill. Note sur la cardioïde et le limaçon de Pascal . . . . .	484
F. D. Thomson, G. Torelli, E. W. Symons, D. Edwardes, Nash, Ch. Ladd, Matz, E. Pecquery, E. Chrétien. Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über Curven von höherem als dem zweiten Grade in synthetischer Behandlung . . . . .	484

## B. Räumliche Gebilde.

G. Veronese. Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens . . . . .	485
G. Veronese. Sopra alcune notevoli configurazioni di punti, rette e piani . . . . .	489
M. Pasch. Beweis eines Satzes über projective Punktreihen . . . . .	489
F. Schur. Ueber die durch collineare Grundgebilde erzeugten Curven und Flächen . . . . .	490
B. Klein. Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde . . . . .	492
Laguerre. Sur la transformation par directions réciproques . . . . .	492
Ribaucour. Sur un système cyclique particulier . . . . .	493
F. Aschieri. Di una corrispondenza Cremoniana quadratica fra gli elementi di due forme fondamentali di 4 <sup>a</sup> specie o spazj rigati . . . . .	494
F. Aschieri. Sopra una corrispondenza quadratica di due spazj rigati . . . . .	494
Em. Weyr. Ueber mehrstufige Curven- und Flächensysteme . . . . .	494
Em. Weyr. Bedeutung der räumlichen Nullsysteme für cubische Invololutionen beider Stufen . . . . .	494
A. Ameseder. Ueber ein Nullsystem zweiten Grades . . . . .	495

















	Seite
Bonsdorff. Ueber einen neuen Connex im Raume . . . . .	649
G. Battaglini. Nota sui connessi ternarii di 1 <sup>o</sup> ordine e di 1 <sup>a</sup> classe . . . . .	649
†J. Möller. Om connexens $C(x, x, 0; u, u, 0)$ principal-coincidens . . . . .	649
W. Stahl. Das Strahlensystem dritter Ordnung und zweiter Klasse . . . . .	649

## Capitel 5. Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.

### A. Verwandtschaft, eindeutige Transformation und Abbildung.

A. Voss. Ueber ein neues Princip der Abbildung krummer Oberflächen . . . . .	651
A. V. Bäcklund. Zur Theorie der Flächentransformationen . . . . .	651
T. A. Hirst. On quadric transformation . . . . .	651
F. Aschieri. Di una corrispondenza Cremoniana quadratica fra gli elementi di due forme fondamentali di 4 <sup>a</sup> specie o spazi rigati . . . . .	652
F. Aschieri. Sopra una corrispondenza quadratica Cremoniana fra gli elementi di due spazi rigati . . . . .	652
J. Guccia. Sur une classe de surfaces représentables, point par point, sur un plan . . . . .	652
F. Aschieri. Sulle corrispondenze Cremoniane nel piano e nello spazio . . . . .	653
F. Aschieri. La trasformazione quadratica doppia di spazio . . . . .	653
F. Aschieri. Sopra la rappresentazione dei complessi del 2 <sup>o</sup> grado nello spazio punteggiato . . . . .	654

### B. Conforme Abbildung.

F. Klein. Conforme Abbildung von Flächen . . . . .	656
L. Lecornu. Sur les polygones générateurs d'une relation entre plusieurs variables imaginaires . . . . .	657
W. M. Hicks. On the numbers of systems of plane equipotential lines of the second degree . . . . .	657
C. Rösen. Ueber eine involutorische isogonale Verwandtschaft . . . . .	658
G. Holzmüller. Vollständige Durchführung einer isogonalen Verwandtschaft . . . . .	658
G. Holzmüller. Ueber Isotermenschaaren, isogonale Verwandtschaften und conforme veränderliche Systeme . . . . .	659

## Zehnter Abschnitt. Mechanik.

### Capitel 1. Allgemeines. (Lehrbücher etc.).

G. Röllinger. Leitfaden für den Unterricht in der Mechanik fester Körper . . . . .	661
H. Undeutsch. Einführung in die Mechanik . . . . .	662
J. Lüroth. Grundriss der Mechanik . . . . .	663
Bobylew. Lehrbuch der analytischen Mechanik . . . . .	664
Sludsky. Lehrbuch der theoretischen Mechanik . . . . .	664
J. Lodge. On action at a distance . . . . .	664

### Capitel 2. Kinematik.

E. Dewulf. Du déplacement d'une figure de forme invariable dans son plan . . . . .	665
J. van Heulen. Mechanische beschouwingen over eenige kromme lijnen . . . . .	666

























	Seite
E. Sang. Equidistant multiples of irrational quantities . . . . .	863
†A. J. Ellis. Method of computing logarithms . . . . .	864
A. J. Ellis. Calculating of natural and tabular logarithms . . . . .	864
A. J. Ellis. The potential radix as a means of calculating logarithms . . . . .	864
H. P. Antilogarithmetabel . . . . .	865
C. Bruhns. Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch . . . . .	865
G. Brehmiker. Logarithmentafeln . . . . .	866
W. Jordan. Kreiscoordinaten für 200 Radien . . . . .	866
G. B. Halsted. On mensuration . . . . .	866
M. W. Crofton. On symbols of operation . . . . .	867
A. Cayley. Analytical forms called trees . . . . .	867
G. M. Schultsky. Das Quadrat der Bildung . . . . .	867
W. C. Wittwer. Grundzüge der mathematischen Chemie . . . . .	868

## B e r i c h t i g u n g e n .

Seite	77	Zeile	1	von oben	lies	„eines algebraischen“	statt	„algebraischer“.
„	82	„	12	„	„	„ $xy$ “	statt	„ $x''$ “.
„	188	„	5	„	„	„F. Franklin“	statt	„J. Franklin“.
„	221	„	9	„	„	„XII“	statt	„XIII.“.
„	383	„	6	„ unten	„	„XII“	statt	„XIII.“.
„	720	„	5	„ oben	„	„XII.“	statt	„XIII.“.

## Verzeichnis

der Herren, welche für den dreizehnten Band Referate  
geliefert haben.

(Die Verantwortlichkeit für den Inhalt der Referate tragen die Herren Referenten. Die in Klammern gesetzten Chiffren bezeichnen die Uebersetzer der in fremder Sprache eingesandten Referate).

A.	Herr Prof. August in Berlin.	Mn.	Herr Prof. Mansion in Gent.
B.	- Prof. Bruns in Leipzig.	My.	- Dr. F. Meyer in Tübingen.
Bjg.	- Prof. Björling in Lund.	Mz	- Dr. Maynz in Ludwigslust.
Bn.	- Dr. Biermann in Berlin.	Nn.	- Prof. Neumann in Leipzig.
Cly.	- Prof. Cayley in Cambridge.	No.	- Prof. Netto in Berlin.
Csy.	- Prof. Casey in Dublin.	O.	- Dr. Ohrtmann in Berlin.
Dk.	- Prof. Dyck in Leipzig.	Ok.	- Prof. Oberbeck in Halle a. S.
Dn.	- Dickstein in Warschau.	Rg.	- Prof. Rodenberg in Darmstadt.
G.	- Prof. v. Geer in Leiden.	Rs.	- Dr. Rosochatius in Berlin.
Glr.	- Prof. Glaisher in Cambridge.	Schg	- Dr. Schlegel in Waren.
Gm.	- Dr. Gram in Kopenhagen.	Schn.	- Prof. Schumann in Berlin.
Gr.	- Prof. Günther in Ansbach.	Scht.	- Dr. Schubert in Hamburg.
H.	- Prof. Hoppe in Berlin.	Sn.	- Dr. Simon in Berlin.
Hr.	- Dr. Hamburger in Berlin.	St.	- Prof. Stolz in Innsbruck.
H.St.	- Prof. H. Stahl in Aachen	Std.	- Prof. Studnička in Prag.
Hz.	- Dr. Hurwitz in Göttingen.	T.	- Dr. Toeplitz in Breslau.
Jn.	- Prof. W. Johnson in Annapolis U. S.	Tx.	- Prof. Teixeira in Coimbra.
L.	- Prof. Lie in Christiania.	Ty.	- Tichomandritzky in Petersburg.
Ls.	- Lazarus in Hamburg.	V.	- Prof. Voss in Dresden.
M.	- Dr. F. Müller in Berlin.	Wn.	- Prof. Wangerin in Halle a. S.
Mi.	- Dr. Michaelis in Berlin.	W.St.	- Prof. W. Stahl in Aachen.
M-L.	- Prof. Mittag-Leffler in Stockholm.		

Briefe und Zusendungen erbitten wir entweder durch Vermittelung  
der Verlagshandlung oder unter der Adresse:

Dr. C. Ohrtmann, Berlin SW, Markgrafenstr. 78. III.











































**N. H. ABEL.** Oeuvres complètes. Nouvelle édition publiée aux frais de l'État Norvégien par MM. L. Sylow et S. Lie. Christiania. Grondahl et Son.

Die vorliegende neue Ausgabe von Abel's Werken ist auf Kosten des Norwegischen Staates durch die Herren Sylow und Lie besorgt. Die sämtlichen Manuscripte sind sorgfältig von Neuem geprüft worden. Der erste Band enthält alle von Abel publicirten Arbeiten, mit Ausnahme einer einzigen Abhandlung, die in dem Magazin des Sciences Naturelles, 1824, erschienen, von Abel selbst, weil fehlerhaft, zurückgezogen war. Der zweite Teil enthält die hinterlassenen Manuscripte und Auszüge aus Briefen. Den Schluss bilden erläuternde und ergänzende Bemerkungen der Herausgeber. O.

**C. G. J. JACOBI.** Gesammelte Werke. I. Band. Herausgegeben von C. W. Borchardt. Berlin. G. Reimer.

Die Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften hat beschlossen, die gesammelten Werke Jacobi's, Lejeune-Dirichlet's und Steiner's in einer der grossen Meister würdigen Ausstattung herauszugeben. In diese Ausgabe sollen nicht nur diejenigen Abhandlungen, welche bereits im Drucke erschienen sind (zum grossen Teil in den immer schwerer zugänglichen ersten Bänden des Crelle'schen Journal's), sondern auch die fast druckfertig im Nachlasse vorgefundenen Arbeiten aufgenommen werden. Fast gleichzeitig mit dem I. Bande der Werke Steiner's erschien der vorliegende erste Band von Jacobi's Werken, der mit dem Bildnisse Jacobi's geschmückt ist. Der kürzlich verstorbene C. W. Borchardt hat sowohl auf die Correctheit des Textes wie auf die typographische Ausstattung die grösstmögliche Sorgfalt verwendet. Die einzelnen Abhandlungen Jacobi's sind nach den behandelten Gegenständen in Gruppen eingeteilt und innerhalb dieser ist, soweit es möglich war, eine chronologische Anordnung beobachtet. Nach diesem Plane werden die beiden ersten Bände alle Abhandlungen Jacobi's über elliptische und Abel'sche Transcendenten umfassen.









XII. 1880. p. 15), die zweite eine eingehende Schilderung seiner Tätigkeit und seines wissenschaftlichen Entwicklungsganges. Beiden ist ein Verzeichnis der 140 Publicationen von Bellavitis, die sich auch auf andere Gebiete als Mathematik und Physik erstrecken, beigelegt. O.

---

ABONNÉ. Nécrologie. Nouv. Ann. (2) XX. 137-139.

Nekrolog für G. Bellavitis. Siehe F. d. M. XII. 1880. p. 15. O.

---

R. RUBINI. Fiore sparso sulla tomba del suo adorato Maestro Fortunato Padula. Nap. Rend. XX. 181-198.

Enthält einen Nachruf des am 23. December 1815 geborenen und am 20. Juni 1881 verstorbenen Mathematikers Fortunato Padula, in dem eine Reihe von Arbeiten desselben eingehend besprochen wird. O.

---

J. E. B. MAYOR. The Cotterells, Cotterills and Cottrells of Cambridge. Lond. M. S., Proc. XII. 217-218.

Die vorliegende Notiz enthält Nachrichten über den verstorbenen Mathematiker T. Cotterill (geboren 1808, gestorben 1881) nebst einer Liste seiner publicirten und unpublicirten Arbeiten. O.

---

Adresse der Berliner Akademie der Wissenschaften zur Feier des funfzigjährigen Doctorjubiläums von Ernst Eduard Kummer. Berl. Monatsber. 1881.

Die Adresse giebt ein kurzes Bild der mathematischen Tätigkeit Kummer's. Diese zerfällt in drei sich auch der Zeit nach abgrenzende Abschnitte. Während des ersten Abschnitts beschäftigte sich Kummer wesentlich mit Untersuchungen über die Theorie der Reihen und Integrale. Als Mittelpunkt der hierher

















































































Auffassung durchaus nicht entspricht. Der Verfasser characterisirt sie jener, der „geometrischen“, gegenüber als die „arithmetische“ und unterzieht dieselbe einer Kritik, die nicht zu ihren Gunsten ausfällt. Freilich hat diese Richtung Gutes geschaffen, das sich namentlich in einer Vervollkommnung des mechanischen Rechnens, d. h. des Rechnens mit Maschinen etc., geltend macht. Der eigentlich Culmann'schen Auffassung ist nur Cremona gefolgt. Den Schluss bildet die Beantwortung der Frage, ob das graphische Rechnen in den Schulunterricht aufzunehmen sei. Der Verfasser beantwortet sie mit: „Nein“.

O.

---















$$F(x, v) = 0, \quad \frac{\partial F(x, v)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F(x, v)}{\partial v} = 0$$

genügt werden kann. Der ausserwesentliche Teiler der Discriminante der Gleichung  $F(x, v) = 0$  ist als der grösste von  $U, V$  unabhängige Teiler des über alle  $n$  Wurzeln der Gleichung erstreckten Productes

$$\Pi \left( U \frac{\partial F(x, v)}{\partial x} + V \frac{\partial F(x, v)}{\partial v} \right)$$

zu characterisiren.

No.

### E. NETTO. Bemerkung über Abel'sche Gleichungen.

Klein Ann. XVIII. 247-252.

Ist  $f(x) = 0$  eine irreductibele Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades und eine Wurzel derselben  $x'_0 = \theta(x_0)$  eine rationale Function einer anderen  $x_0$ , so ordnet sich das System der Wurzeln (cfr. Abel, Oeuvres; nouv. éd. Bd. I. No. XXV. § 1) in folgende Tabelle ein:

$$\begin{array}{ccccccc} x_0 & \theta(x_0) & \theta^2(x_0) & \dots & \theta^{m-1}(x_0), & & \\ x_1 & \theta(x_1) & \theta^2(x_1) & \dots & \theta^{m-1}(x_1), & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ x_{\nu-1} & \theta(x_{\nu-1}) & \theta^2(x_{\nu-1}) & \dots & \theta^{m-1}(x_{\nu-1}). & & \end{array} \quad \left( \begin{array}{l} m\nu = n \\ \theta^m(x_\alpha) = x_\alpha \end{array} \right)$$

#### Die Resolvente

$$\varphi_0 = x_0 + \theta(x_0) + \theta^2(x_0) + \dots + \theta^{m-1}(x_0)$$

genügt einer Gleichung  $\nu^{\text{ten}}$  Grades  $F(\varphi) = 0$ , mit deren Lösung die Lösung der Gleichung  $f(x) = 0$  gegeben ist. Diese Gleichung ist zwar ebenso wie  $f(x) = 0$  irreductibel, aber ohne weitere Voraussetzungen eine allgemeine. Der Verfasser stellt sich die Frage: „Welche Bedingungen müssen die Wurzeln von  $f(x) = 0$  erfüllen, damit dieselben Beziehungen, wie bei  $f(x) = 0$ , auch bei  $F(\varphi) = 0$  eintreten?“ jedoch unter der Beschränkung, dass aus  $\varphi_\beta = \text{Rat}(\varphi_\alpha)$  auch  $x_\beta = \text{Rat}_1(x_\alpha)$  folgen solle. Unter dieser Beschränkung ergibt sich als notwendig und hinreichend hierfür, dass zwischen den Wurzeln der Gleichung  $f(x) = 0$  die Beziehungen stattfinden:



























alle reell und positiv sind, so kann weder  $\lambda$  noch  $\mu$  kleiner sein als 9. O.

---

S. RÉALIS. Démonstration de propositions énoncées.

Nouv. Ann. (2) XX. 408-411.

Die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + px + q = 0$$

mögen  $a, b, c$  sein; es werden einige Formeln aufgestellt, welche sich auf die Ausdrücke

$$p^2 - 4qa, \quad p^2 - 4qb, \quad p^2 - 4qc$$

beziehen.

No.

---

RAUTENBERG. Ueber Gleichungen dritten und vierten Grades. Pr. Deutsch-Krone.

Schulgemässe Behandlung einiger elementarer Fragen und Lösungsmethoden. No.

---

F. BRIOT. Résolution de l'équation du quatrième degré.

Nouv. Ann. (2) XX. 225-227.

Die Lösung von

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

wird mittels

$$x = v + y + z, \quad v^2 + y^2 + z^2 = -\frac{A}{2}, \quad vyz = -\frac{B}{8}$$

bewerkstelligt.

No.

---

A. CAYLEY. A solvable case of the quintic equation.

Quart. J. XVIII. 154-157.

Stellt man die Wurzeln der Gleichung

$$x^5 - 5ax^4 + \dots = 0$$

unter der Form

$$x_\alpha = a + B\omega^\alpha + C\omega^{2\alpha} + D\omega^{3\alpha} + E\omega^{4\alpha}$$

dar, wobei  $\omega$  eine imaginäre fünfte Wurzel der Einheit bedeutet,



Die Bestimmung der genauen Anzahl der gemeinsamen Wurzeln zweier Gleichungen geschieht in der bekannten Weise durch die Untersuchung über das Verschwinden gewisser Determinanten, welche aus den Coefficienten gebildet sind. No.

---

ESCARY. Sur la résolution d'un système particulier de deux équations simultanées du degré  $m$  à deux inconnues. Nouv. Ann. (2) XX. 227-229.

Die Lösung der Gleichungen

$$ax^m + by^m = \frac{a}{x^m} + \frac{b}{y^m} = c$$

vereinfacht sich bei der Einführung der Winkel des Dreiecks mit den Seiten  $a, b, c$ . No.

---

M. LUXENBERG. Ueber die Gleichung  $x'' = y^x$ .

Hoppe Arch. LXVI. 332-334.

Es ist

$$\left[ \left( \frac{x+1}{x} \right)^x \right] \left( \frac{x+1}{x} \right)^{x+1} = \left[ \left( \frac{x+1}{x} \right)^{x+1} \right] \left( \frac{x+1}{x} \right)^x.$$

Zu jeder positiven Zahl  $a$ , die grösser als 1 ist (mit Ausnahme von  $e$ ), existirt eine von ihr verschiedene Zahl  $b$ , für welche  $a^b = b^a$  wird. No.

---

## Capitel 2.

### Theorie der Formen.

B. PEIRCE. Linear associative algebra. Sylv., Am. J. IV. 99-230.

Das Referat erfolgt im nächsten Jahrgange. My.

---













dann genügt bekanntlich jede Covariante  $\varphi$  den beiden partiellen Differentialgleichungen:

$$y \frac{\partial \varphi}{\partial x} = a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \cdots + ma_{m-1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_m}$$

$$x \frac{\partial \varphi}{\partial y} = a_m \frac{\partial \varphi}{\partial a_{m-1}} + \cdots + ma_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_0},$$

oder kürzer

$$y \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \delta = 0, \quad x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \delta' = 0.$$

Bezeichnet man andererseits die Processe

$$p \frac{\partial}{\partial q} + p' \frac{\partial}{\partial q'}, \quad q \frac{\partial}{\partial p} + q' \frac{\partial}{\partial p'}$$

mit  $\delta_1, \delta_2$ , so lassen sich die für die Covariante  $\varphi'$  der transformirten Form  $F$  giltigen beiden Differentialgleichungen darstellen durch:

$$\delta_1 \varphi' = 0, \quad \delta_2 \varphi' = 0.$$

Weiter hat Herr Bruno gezeigt, wie man das Cayley'sche Verfahren, aus dem ersten resp. letzten Gliede einer Covariante die übrigen abzuleiten, formal einfacher darstellen kann, nämlich:

$$\varphi = x^\nu e^{\frac{y}{x}\delta'} \cdot C_0 = y^\nu e^{\frac{x}{y}\delta} \cdot C_\nu,$$

wo  $C_0$  der erste,  $C_\nu$  der letzte Coefficient ist,  $\delta, \delta'$  die obigen Processe, und  $e^\xi$  die bekannte Operation bedeutet.

Die besonderen Eigenschaften der Covarianten (§ 17) haben verschiedenartige Zusätze erhalten. Auf die Relationen zwischen den Invarianten einer Covariante und den Invarianten der zugehörigen Form ist genauer eingegangen.

Der Hermite'sche Satz (Original No. 132) ist in der Weise erweitert, dass er heisst: „Sind  $\varphi(x, y)$  und  $\psi(x, y)$  Covarianten der Form  $f(x, y)$  von den Ordnungen  $\nu, \nu+2$  und eliminirt man  $x$  aus den beiden Gleichungen:

$$\psi(x, 1) = 0, \quad \frac{\varphi(x, 1)}{\psi'(x, 1)} = \zeta,$$



















Wollte man für  $n = 3$  ganz analog verfahren (d. h. für eine Form  $a_x^m b_y^m c_z^m$ ), so hätte man mit Hülfe der sechs Glieder

$$+A_1, +A_2, +A_3, -A_4, -A_5, -A_6$$

der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

die  $m^{\text{te}}$  Potenz des Ausdrucks

$$\sum f_i A_i$$

zu entwickeln. Die Entwicklung würde genau so viel verschiedene Glieder liefern, als die der einfacheren  $(\sum f_i)^m$  d. h.  $(m+5)$ .

In der Tat aber wird die gesuchte Zahl  $\pi(m, 3)$  kleiner, und es handelt sich im Weiteren darum, diesen Unterschied aufzufinden. Für den vorliegenden Fall gelingt dies mittels der Entwicklung

$$\left[ \frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{\mu_2}{\mu_3} + \frac{\mu_3}{\mu_4} + \frac{\mu_4}{\mu_5} + \frac{\mu_5}{\mu_6} + \frac{\mu_6}{\mu_1} \right]^m.$$

Dann ist der entsprechende Covariantentypus:

$$\left[ \frac{\mu_1}{\mu_2} A_1 + \frac{\mu_2}{\mu_3} A_2 + \frac{\mu_3}{\mu_4} A_3 + \frac{\mu_4}{\mu_5} A_4 + \frac{\mu_5}{\mu_6} A_5 + \frac{\mu_6}{\mu_1} A_6 \right]^m.$$

Im Allgemeinen ergibt sich für  $n$  Variablenreihen das merkwürdige Resultat, dass der Coefficient irgend eines Gliedes  $f_i$  der bezüglichen Entwicklung

$$[\sum \pm a_x b_{x'} c_{x''} \dots l_{x^{(n)}}]^m$$

proportional ist dem Ausdruck

$$\frac{\Omega^m \cdot f_i}{\Omega^n \cdot f},$$

wo  $\Omega$  den Process

$$\sum \pm \frac{\partial}{\partial x'_1} \frac{\partial}{\partial x''_2} \dots \frac{\partial}{\partial x^{(n)}_n}$$

angiebt. Wegen der näheren Ausführung muss in Hinsicht auf die grosse Allgemeinheit des Gegenstandes auf die höchst interessante Abhandlung selbst verwiesen werden. My.

TH. PEPIN. Sur la classification des formes quadratiques binaires. Rom., Acc. P. d. N. L. XXXIII. 354-392.

Das Referat erfolgt im nächsten Bande.

My.

C. LE PAIGE. Sur les formes binaires à plusieurs séries de variables. Belg. Bull. (3) II. 40-53.

F. FOLIE. Rapport sur ce mémoire. Belg. Bull. (3) II. 5-6.

Der Verfasser wendet direct die symbolische Bezeichnung für die Formen mit mehreren Reihen von Variabeln an, statt ein reducirtes binäres System zu berechnen, wie es Clebsch gethan hat. Er kann in Folge der Anwendung dieser Methode die Gruppen von Variabeln verschiedenen Substitutionen unterwerfen. Für den Fall trilinearer Formen stellt er zwei canonische Formen auf, die es ihm leicht machen, diese Formen zu untersuchen. Diese Methode lässt sich auch auf mehrlineare Formen anwenden.

Mn. (O.).

A. CAYLEY. Specimen of a literal table for binary quantics. Sylv., Am. J. IV. 248-256.

Diese Arbeit tritt nach des Verfassers Angabe etwas verspätet auf, da sie ursprünglich den Zweck hatte, die Berechnung der Covarianten der binären Form fünften Grades zu erleichtern; sie ist indessen noch jetzt für die analoge Berechnung der höheren Formensysteme sehr brauchbar. Sie giebt, rein arithmetisch betrachtet, an, wie oft eine der Zahlen 1 bis 18 (soweit ist die Tabelle vorläufig fortgeführt) als Summe niedrigerer ganzer Zahlen darstellbar ist, z. B. die Zahl 4 als resp. Summe von

$$4, 1+3, 2+2, 1+1+2, 1+1+1+1.$$

Für den algebraischen Zweck schreibt aber der Verfasser diese Zusammensetzungen in literaler Form, d. h.: Bedeutet  $a$  die Null,  $b$  die Eins,  $c$  die Zwei etc., so kann man statt obiger Formen



































Lösungen von weiteren Aufgaben über specielle Formen  
von J. J. SYLVESTER, H. STABENOW, W. J. C. SHARP  
finden sich Ed. Times XXXIV. 108-109, 110-111.

O.

### Capitel 3.

## Elimination und Substitution, Determinanten, symmetrische Functionen.

L. KRONECKER. Zur Theorie der Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen.

Berl. Monatsber. 1881. 535-600.

L. KRONECKER. Auszug aus einem Briefe an E. Schering.

Gött. Nachr. 1881. 271-279.

Die erste dieser Arbeiten knüpft an die Abhandlungen des Verfassers vom Februar 1873 und Februar 1878 an. Es handelt sich um die Lösung der Aufgabe, zu zwei ganzen Functionen  $f(x)$ ,  $f_1(x)$  der Grade  $n$ ,  $n-n_1$  zwei Multiplicatoren  $\Phi(x)$ ,  $\Psi(x)$  zu bestimmen, für welche der Grad  $\varrho$  von

$$(C) \quad f_1(x) \Psi(x) - f(x) \Phi(x) = F(x)$$

kleiner als  $n$  wird. Eine erste allgemeine Methode der Lösung ergibt sich aus der Kettenbruch-Entwicklung von  $f_1:f$ ; die hierbei auftretenden Näherungswerte seien  $\varphi_\lambda:\psi_\lambda$ , wo

$$\varphi_{k+1} \psi_k - \psi_{k+1} \varphi_k = 1$$

ist, und

$$f_1 \psi_k - f \varphi_k = f_{k+1}$$

heissen soll. Die allgemeinste an Stelle von  $\Psi$  der Gleichung (C) genügende Function  $\nu^{\text{ten}}$  Grades ist eine beliebige durch  $\psi_k$  teilbare ganze Function  $\Psi = \theta \cdot \psi_k$ , für welche der Grad des Quotienten kleiner als jeder der beiden Abstände von  $\nu$  zu den beiden Grenzen  $n_k - 1$  und  $n_{k+1}$  ist, zwischen denen sie liegt, wenn





















Von Brioschi ist in Crelle's J. 1855 bewiesen worden, dass sich eine Determinante von grader Ordnung als Pfaff'sche Determinante darstellen lässt. Hier wird gezeigt, dass diese Eigenschaft für alle Determinanten gilt, und zwar ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

gleich der Pfaff'schen Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}(\alpha_2 - \beta_1) & \frac{1}{2}(\alpha_3 - \gamma_1) & \frac{1}{2}(\alpha_3 + \gamma_1) & \frac{1}{2}(\alpha_2 + \beta_1) & \alpha_1 \\ & \frac{1}{2}(\beta_3 - \gamma_2) & \frac{1}{2}(\beta_3 + \gamma_2) & \beta_2 & \frac{1}{2}(\beta_1 + \alpha_2) \\ & & \gamma_3 & \frac{1}{2}(\gamma_2 + \beta_3) & \frac{1}{2}(\gamma_1 + \alpha_3) \\ & & & \frac{1}{2}(\beta_3 - \gamma_2) & \frac{1}{2}(\alpha_3 - \gamma_1) \\ & & & & \frac{1}{2}(\alpha_2 - \beta_1) \end{vmatrix}.$$

Csy. (0.).

TH. MUIR. On the multiplication of the  $(n-1)^{\text{th}}$  power of a symmetric determinant of the  $n^{\text{th}}$  order by the second power of any determinant of the same order. Sylv., Am. J. IV. 273-275.

Der hier gegebene Satz liefert die Verallgemeinerung eines Hesse'schen Theorems. Für  $n = 3$  erhalten wir: Bezeichnet man mit  $\Delta$  eine beliebige Determinante  $|a_{\lambda\mu}|$  dritter Ordnung, mit  $\Delta_{uv}$  dieselbe Determinante umrändert durch  $u_1, u_2, u_3; v_1, v_2, v_3; 0$ , so wird

$$\begin{vmatrix} \Delta_{xx} & \Delta_{xy} & \Delta_{xz} \\ \Delta_{yx} & \Delta_{yy} & \Delta_{yz} \\ \Delta_{zx} & \Delta_{zy} & \Delta_{zz} \end{vmatrix} = -\Delta^2 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}^2.$$

No.



verschwindet nirgends im Intervall  $\omega = a$ ,  $\omega = b$ . Hierbei sind die  $a'$  die Ableitungen der  $a$  nach  $\omega$ . Es wird eine Anwendung auf die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} - \omega, & A_{12} & , \dots & A_{1n} \\ A_{21} & , & A_{22} - \omega, & \dots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & , & A_{n2} & , \dots & A_{nn} - \omega \end{vmatrix}$$

gemacht.

No.

C. LE PAIGE. Sur les déterminants hémisymétriques d'ordre pair. Prag. Ber. 1880. 125-127.

Die Unterdeterminanten  $(2n-1)^{\text{ten}}$  Grades einer hemisymmetrischen Determinante des Grades  $2n$  sind durch die Quadratwurzel dieser Determinante teilbar.

No.

TH. MUIR. On a property of persymmetric determinants. Mess. (2) XI. 65-77.

Es wird bewiesen, dass die persymmetrische Determinante, die aus  $a_1, a_2, a_3 \dots a_{2n-1}$  gebildet wird, gleich ist der persymmetrischen Determinante, die man aus

$a_1, (a_1, a_2, \widehat{X}(m, 1)), (a_1, a_2, a_3, \widehat{X}(m, 1))^2, \dots (a_1, a_2, a_3 \dots a_{2n-1}) \widehat{X}(m, 1)^{2n-2}$  bilden kann.

Glr. (O.).

F. J. STUDNÍČKA. Ueber eine neue Determinanteneigenschaft. Prag. Ber. 1880. 50-55.

Die Eigenschaft kommt auf die Berechnung einer Determinante heraus, bei der alle Elemente in der Hauptdiagonale den Wert  $-1$ , ausserhalb derselben den Wert  $+1$  besitzen.

No.

TH. MUIR. On the resolution of a certain determinant into quadratic factors. Mess. (2) XI. 105-108.





$$a_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2}, \quad (k+1)^2, \quad \cos(ak), \quad \sin(ak)$$

bestimmt.

No.

A. PUCHTA. Ein neuer Satz aus der Theorie der Determinanten. Wien. Denkschr. XLIII. 277-282.

Der soeben besprochene Zerlegungssatz für doppelt-orthosymmetrische Determinanten wird in der Weise verallgemeinert, dass jedes Element einer solchen Determinante  $m^{\text{ter}}$  Ordnung durch ein neues doppelt-orthosymmetrisches System  $\mu^{\text{ter}}$  Ordnung ersetzt wird. Die entstehende Determinante der Ordnung  $m \cdot \mu$  ist gleichfalls in ähnlicher Weise zerlegbar, und auf die neue Determinante lässt sich dasselbe Verfahren wiederum anwenden.

No.

R. F. SCOTT. Mathematical notes. Mess. (2) X. 142-149.

I. Der Verfasser giebt einen Satz über eine Determinante  $n^{\text{ter}}$  Ordnung, der eine Verallgemeinerung des Satzes:

$$\begin{vmatrix} \sin(a+f) \sin(b+f) \sin(c+f), \cos f, \sin f \\ \sin(a+g) \sin(b+g) \sin(c+g), \cos g, \sin g \\ \sin(a+h) \sin(b+h) \sin(c+h), \cos h, \sin h \end{vmatrix}$$

$$= \sin(g-h) \sin(h-f) \sin(f-g) \sin(a+b+c+f+g+h)$$

ist. Es folgen Sätze über Determinanten von Covarianten und andere Determinantensätze. Glr. (O.).

W. KRETKOWSKI. Ueber die Transformationen gewisser Polynome zweiten Grades. Krak. Denkschr. 1881. (Polnisch.).

Das (bilineare) Polynomen

$$(1) \quad u_{1,2} = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_{\mu,\nu} z_{\mu} y_{\nu}$$

und das Polynomen ( $n$ -ary quadric- (Cayley))

$$(2) \quad u_{1,1} = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_{\mu,\nu} z_{\mu} z_{\nu}.$$

$$a_{\nu,\mu} = a_{\mu,\nu};$$

$$\mu, \nu = 1, 2, \dots, n$$

können die folgende Form annehmen:

Das Polynomen (1):

$$u = -\frac{1}{A} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & D_{z_1} u \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} & D_{z_n} u \\ D_{y_1} u & \dots & D_{y_n} u & 0 \end{vmatrix} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

oder:

$$u = -\frac{1}{A^{n-2}} \begin{vmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n}, & z_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,n}, & z_n \\ y_1 & \dots & y_n & , & 0 \end{vmatrix} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Das Polynomen (2) aber:

$$u = -\frac{1}{4A} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n}, & D_{z_1} u \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n}, & D_{z_n} u \\ D_{z_1} u & \dots & D_{z_n} u, & 0 \end{vmatrix} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

oder:

$$u = -\frac{1}{A^{n-2}} \begin{vmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} & z_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,n} & z_n \\ z_1 & \dots & z_n & 0 \end{vmatrix} \quad (n = 2, 3, \dots),$$

wo

$$A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$A_{\mu,\nu} = (-1)^{\mu+\nu} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,\nu-1} & , & a_{1,\nu+1} & \dots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\mu-1,1} & \dots & a_{\mu-1,\nu-1} & , & a_{\mu-1,\nu+1} & \dots & a_{\mu-1,\nu} \\ a_{\mu+1,1} & \dots & a_{\mu+1,\nu-1} & , & a_{\mu+1,\nu+1} & \dots & a_{\mu+1,\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,\nu-1} & , & a_{n,\nu+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \\ (\mu, \nu = 1, 2, \dots, n).$$

Dn.

F. J. STUDNIČKA. Ueber independente Darstellung höherer Varianten und Retrovarianten einer Gleichung. Cas. X. 208. (Böhmisch.).

Unter Zugrundelegung des Cayley'schen Ausdrucks

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)(x, 1)^n = 0$$

erhält man für die Variante  $n^{\text{ten}}$  Grades  $V_n$  den independenten Ausdruck

$$V_n = \begin{vmatrix} a_1^2 - a_0 a_2 & a_2 & 1 & & 0 & \dots & 0 \\ a_1^3 - a_0^2 a_3 & a_3 & 3a_1 & & 1 & \dots & 0 \\ a_1^4 - a_0^3 a_4 & a_4 & 6a_1^2 & & 4a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^n - a_0^{n-1} a_n & (n)a_1^{n-2} & (n)a_1^{n-3} & \dots & na_1 & & 0 \end{vmatrix},$$

und daher analog für die Retrovariante  $V'_n$

$$V'_n = \begin{vmatrix} a_{n-1}^2 - a_n a_{n-2} & 1 & \dots & 0 \\ a_{n-1}^3 - a_n^2 a_{n-3} & 3a_{n-1} & \dots & 0 \\ a_{n-1}^4 - a_n^3 a_{n-4} & 6a_{n-1}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1}^n - a_n^{n-1} a_0 & (n)a_{n-1}^{n-2} & \dots & na_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Bei dieser Gelegenheit wird ein „lapsus calami“ in Mat-thiessen's „Grundzüge der antiken und modernen Algebra der literalen Gleichungen“ S. 31 corrigirt. Std.

D. M. MERINO. Sobre una propiedad de las determi-nantes de tercer grado. Cron. cient. IV. 133-137.

A. DEL RE. Relazione tra due determinanti. Batt. G. XIX. 116-117.

Es sei

$$P_n = |a_\lambda^\kappa| \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n; \kappa = 0, 1, \dots, n-1),$$

und

$$D = \frac{\partial P_{n+1}}{\partial a_{n+1}^k};$$

dann ist

$$D = P_n \Sigma(a_1 a_2 \dots a_{n-k}).$$

No.

R. F. SCOTT. On some forms of compound determinants.  
Mess. (2) XI. 96-98.

Der Verfasser betrachtet Determinanten, die aus Combinationen von drei verschiedenen Determinanten entstehen.

Glr. (O.)

---

R. F. SCOTT. On some alternating functions of  $n$  variables.  
Mess. (2) XI. 98-103.

Die Arbeit bezieht sich auf Determinanten, welche die Wurzeln, die Coefficienten und die Summen der Wurzelpotenzen einer Gleichung enthalten. Die Sätze sind zum Teil bekannt.

Glr. (O.)

---

W. KAPTEYN. Note sur une classe de fonctions symétriques. Hoppe Arch LXVII. 102-104.

Es wird.

$$S = \sum_{\lambda=1}^q \frac{y_{\lambda}^m}{z_{\lambda}}$$

bestimmt, wo  $y_1, y_2, \dots, y_q$  die Wurzeln einer binomischen Gleichung und die  $z_{\lambda}$  die Ausdrücke

$$A_0 + A_1 y_{\lambda} + A_2 y_{\lambda}^2 + \dots + A_{q-1} y_{\lambda}^{q-1}$$

bedeuten.

No.

---

# **Dritter Abschnitt.**

## **Zahlentheorie.**

### **Capitel 1.**

#### **A l l g e m e i n e s.**

P. G. LEJEUNE-DIRICHLET. Lezioni sulla teoria dei numeri, pubblicate e corredate da R. Dedekind, tradotte dalla terza edizione da A. Faifofer. Venezia. 8°.

---

T. F. LÖFGREN. Talets teori i enlighet med nyare åsigter. Linköping. Diss. Upsala. 8°.

M. L.

J. J. SYLVESTER. On Tchebycheff's theorem of the totality of the prime numbers comprised within given limits. Sylv., Am. J. IV. 230-247.

Reproduction der von Serret (Cours d'algèbre supérieure II. 230-233) gegebenen Darstellung der Untersuchungen von Tchebyscheff; im Anschluss daran ein Versuch engerer Grenzbestimmung für die gesuchte Anzahl. Riemann's bezügliche Arbeit (vergl. Ges. Werke 136-144) bleibt unberücksichtigt.

Sn.









ander und zu  $P$  relativ prim sind. Weitere algebraische Übungsaufgaben unter Einführung des Imaginären u. dgl. Sn.

C. HENRY. Décomposition des nombres  $f^{12} - 9g^{12}$  et du double de ces nombres en deux cubes rationnels.

Nouv. Ann. (2) XX. 417-420.

Diese Zerlegung gelingt mit Hülfe einer von Herrn Lucas früher gegebenen Identität. Sn.

F. HOČEVAR. Zur Lehre der Teilbarkeit der ganzen Zahlen. Pr. Innsbruck.

Man teile eine im System der Basis  $a$  gegebene Zahl in  $n$ -ziffrige Zahlen und bilde die Summen der sodann an den graden und ungraden Stellen befindlichen. Ist die Differenz der beiden Summen durch einen Divisor von  $a^n + 1$  teilbar, so ist es auch die ursprüngliche Zahl. Sn.

WEILL. Théorème d'arithmétique. S. M. F. Bull. IX. 172.

Ist

$$N = \alpha + \beta + \dots + pq + p_1 q_1 + \dots + rst,$$

so ist  $N!$  teilbar durch das Product

$$\alpha! \beta! \dots (p!)^q q! (p_1!)^{q_1} q_1! \dots (r)^s (s!)^t t!$$

Sn.

WEILL. Théorème d'arithmétique. C. R. XCII. 1066-1067.

Dasselbe Theorem bewiesen mit Hülfe der Combinationsrechnung. Sn.

J. J. SYLVESTER. Sur les diviseurs des fonctions des périodes des racines primitives de l'unité. C. R. XCII. 1084-1086.







$\theta$  sei primitive Wurzel der Gleichung  $x^p - 1 = 0$ ,  $g$  primitive Congruenzwurzel der Primzahl  $p$ ,  $q$  Teiler von  $p-1$ ,  $p-1 = q \cdot \omega$  und

$$s_i = \sum_{i_1=0}^{i_1=\omega-1} \theta^{g^{i_1} + i_1 q}.$$

Dann erhält man für  $s_i^k$

$$\sum \theta^{g^i (g^{i_1} q + g^{i_2} q + \dots + g^{i_k} q)},$$

wo die Summe über alle  $\omega^k$  Combinationen zu erstrecken ist, welche man erhält, wenn man den Grössen  $i_1 \dots i_k$  die Werte  $0, 1 \dots p-1$  beilegt. Es seien nun  $\omega N_k$  die Anzahl der Summen  $g^{i_1} q + g^{i_2} q + \dots + g^{i_k} q$ , welche durch  $p$  teilbar sind, und  $\omega N_{j,k}$  die Anzahl derjenigen, welche der Congruenz

$$x^\omega - g^{j\omega} \equiv 0 \pmod{p}$$

genügen. Dann gilt die Relation

$$N_k + N_{k,0} + \dots + N_{k,q-1} = \omega^{k-1},$$

und wenn

$$S_i = \omega N_k + N_{k,0} s_i + \dots + N_{k,q-1} s_{i+q-1}$$

gesetzt wird, so folgt

$$\sum_{i=0}^{i=q-1} s_i^k = p N_k - \omega^{k-1} = S_k.$$

Ist  $q$  Primzahl, so lassen sich die  $N_{k,j}$  mit Hülfe von  $\frac{(q-1)^2}{4} + 1$  positiven ganzen Zahlen ausdrücken, welche für  $q = 2, 3$  unter den  $N_{2,j}$  zu wählen sind. Für höhere Werte des  $q$  lassen sich die  $S_k$  nach der Lehre von den symmetrischen Functionen als ganze Functionen der  $S_1, S_2 \dots S_q$  darstellen. So erhält man, wenn  $k > q$ , eine Gleichung zwischen den  $\frac{(q-1)^2}{4} + 1$  Hülfsgrössen, mithin zur Bestimmung dieser letzteren eine hinlängliche Anzahl von Gleichungen, und schliesslich die Coefficienten der Gleichungen  $q^{\text{ten}}$  Grades, deren Wurzeln die  $s_i$  sind.

Es folgen fernere Andeutungen über die Fälle, wenn  $q$  andere Werte hat, und ein Hinweis auf gewisse Versuche zum Beweis des Fermat'schen Lehrsatzes, deren Unzulänglichkeit P. Pepin vor



1841) hingewiesen, welche obigen Satz in einem interessanten Zusammenhang zu allgemeineren enthält. Sn.

---

W. A. WHITWORTH, GENESE. Solutions of a question (6357). Ed. Times XXXIV. 51.

Die Zahl 34 lässt sich auf 169 Arten als Summe von verschiedenen Zahlen darstellen. Die allgemeine Frage wird nicht gelöst. O.

---

J. J. SYLVESTER. On a point in the theory of vulgar fractions. Sylv., Am. J. III. 332-336, 388-390.

Ueber die Auflösung echter Brüche in Reihen von der Form

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots$$

(Sorites). Besondere Behandlung des Falles

$$u_{x+1} = u_x^2 - u_x + 1.$$

Sn.

---

G. B. AIRY. On a systematic interruption in the order of numerical values of vulgar fractions when arranged in a series of consecutive magnitudes. Phil. Mag. 1881.

Csy.

---

Weitere Beweise von Lehrsätzen und Lösungen von Aufgaben aus der Zahlentheorie von S. RÉALIS, A. GENEIX-MARTIN, MORET-BLANC, G. HEPPEL, S. TEBAY, C. LEUDES DORE, W. H. WALENN, C. HARKEMA, G. EASTWOOD finden sich Nouv. Ann. (2) XX. 177-178, 280-281, 330-332, 335-336, 375-376; Ed. Times XXXIV. 95-96, 97-98, 106-107.

O.

---





Quadrat der Hypotenuse vermehrt oder vermindert um das einfache oder doppelte der Dreiecksfläche einer Quadratzahl gleich sei.  
Sn.

---

DESBOVES. Correspondance. Nouv. Ann. (2) XX. 173-175.

Bemerkungen über die Lösungen der diophantischen Gleichung  

$$ax^3 + by^3 + dxyz = cz^3.$$

Sn.

---

MORET-BLANC. Questions d'analyse indéterminée proposées par M. Edouard Lucas. Nouv. Ann. (2) XX. 201-213.

1. Ist  $(x, y, z)$  eine ganzzahlige Lösung der diophantischen Gleichung

$$Ax^3 + By^3 + Cz^3 + 3Dxyz = 0,$$

so erhält man eine neue Lösung mittels der Gleichungen

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z} = 0,$$

$$AXx^2 + BYy^2 + CZz^2 = 0.$$

2. Bezeichnen  $(x, y, z)$ ,  $(x_1, y_1, z_1)$  verschiedene Lösungen obiger Gleichung, so erhält man eine Lösung mit Hülfe der Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$AXxx_1 + BYyy_1 + CZzz_1 = 0.$$

3. Die biquadratische Gleichung  $x^4 - 5y^4 = 1$  hat ausser der Lösung  $x = 3$ ,  $y = 2$  keine weitere in ganzen Zahlen.

4. Der Unterschied zweier auf einander folgender Cuben ist nie eine Biquadratzahl. 5. Alle ganzzahligen Lösungen der arithmetischen Progressionen

$$x^2, 2y^2, 3z^2, 4u^2 \text{ und } x^2, 3y^2, 5z^2, 7u^2$$

zu finden. 6. Alle Werte von  $x$  zu finden, so dass die Summe der fünften Potenzen der  $x$  ersten Zahlen eine Quadratzahl ist.

Sn.

---







so ist auch

$$4(ax+by+cz)^3 - 3(ax+by+cz)(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \\ - 2(b-c)(c-a)(a-b)(y-z)(z-x)(x-y) - 54abcxyz = 0. \\ \text{Glr. (O.).}$$

### Capitel 3.

#### Kettenbrüche.

G. HUMBERT. Sur une généralisation de la théorie des fractions continues algébriques. (Suite). S. M. F. Bull. IX. 24-30.

Vergl. d. Jahrbuch Bd. XII. 1880. p. 334. Die Polynome

$$P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$$

genügen einer linearen Differentialgleichung von der Ordnung  $n+1$ , worin der Coefficient einer beliebigen Ableitung  $\frac{d^\mu y}{dx^\mu}$  eine ganze Function von  $x$  vom Grade  $\mu$  ist. St.

H. J. S. SMITH. De fractionibus quibusdam continuis. Chelini, Coll. Math. 117-144.

Für

$$P_1 = (q_1 q_2 \dots q_i q_i \dots q_2 q_1), \quad P_2 = (q_2 q_3 \dots q_i q_i \dots q_3 q_2), \\ R = (q_1 q_2 \dots q_i q_i \dots q_3 q_2),$$

wo die in den Klammern stehenden Ausdrücke Euler'sche Kettenbruch-Algorithmen (Diagonalglieder von Kettenbruchdeterminanten) bedeuten, besteht die Relation

$$P_1 P_2 - R^2 = 1,$$

welche hier zum Ausgangspunkte für weiter gehende Untersuchungen dient. Insbesondere wird mit Hülfe eines von Herrn Sylvester aufgestellten Satzes die Form jener periodischen Kettenbrüche bestimmt, für welche analog die Gleichungen

$$P_1 P_2 - 2R^2 = 1, \quad P_1 P_2 - 3R^2 = 1 \dots$$

gültig sind. Die Ergebnisse werden verwendet zur Eruirung gewisser zahlentheoretischer Wahrheiten, bezüglich auf die Darstellung gewisser ganzer Zahlen in der Form  $(\alpha^2 + m\beta^2)$ . Es wird dabei angeknüpft an die bekannte Inauguraldissertation von Goepel (Crelle's J. 45. Bd.). Von Einzelresultaten mögen, um eine Probe von dem Charakter der ganzen Untersuchung zu geben, die nachstehenden angeführt sein: Wenn  $a.b = 3x^2 + 1$ , so ist auch  $a = m^2 + 3n^2$  und  $b = p^2 + 3q^2$ ; jede Zahl lässt sich darstellen in einer der beiden Formen

$$x^2 + y^2 + 3(u^2 + v^2), \quad x^2 + 2y^2 + 3u^2 + 6v^2.$$

Zu gewissen Theoremen Jacobi's und Dirichlet's werden vielfache interessante Beziehungen gewonnen. Gr.

Lösungen weiterer Aufgaben über Kettenbrüche von  
WOLSTENHOLME, PRATT, R. TUCKER, J. O'REGAN finden  
sich Ed. Times XXXIV. 65-66, 69-70.

O.













































**willkürlich gewählt werden, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass man ein beliebiges Dreieck aus ihnen bilden kann,  $\frac{1}{2}$  und die, dass man ein stumpfwinkliges bilden kann,  $\frac{1}{4}\pi$ .**

**O.**

---

**Lösungen weiterer Aufgaben über geometrische Wahrscheinlichkeit von SEITZ, G. F. WALKER, MATZ finden sich Ed. Times XXXIV. 59-60, 107, 111-112.**

**O.**

---





































































Der Verfasser beweist, indem er nur die Fläche der gleichseitigen Hyperbel als bekannt annimmt, die folgenden Gleichungen:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = C + \log n + \frac{1}{2n} - \frac{\theta}{2n(2n+1)},$$

$$\log(1.2.3 \dots N) = \frac{1}{2}(C+1) + \left(N + \frac{1}{2}\right) \log N - \frac{\theta}{2},$$

wobei

$$0 < \theta < 1$$

ist, während  $C$  die Euler'sche Constante bezeichnet.

Mn. (Wn.).

















$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left( \frac{x}{1-x} \right)^n = \sum_{m=1}^{\infty} h_m x^m,$$

wo  $h_m$  linear in den  $c_n$  dargestellt ist, und nach Substitution

$$\frac{x}{1-x} = z; \quad x = \frac{z}{1+z}$$

die gleiche Form in  $-z$

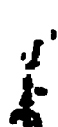
$$\sum_{m=1}^{\infty} h_m \left( \frac{z}{1+z} \right)^m = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n,$$

demnach (mit geringer Aenderung) die gleiche Darstellung von  $c_n$  in den  $h_m$ . Setzt man in ersteren Relationen  $m = 1, 2, \dots, n$ , löst das Gleichungssystem nach  $c_n$  auf und drückt  $c_n$  in den  $h_m$  aus, so ergibt sich die gesuchte Formel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & h_1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & h_2 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & h_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \frac{n-1}{1} & \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} & \dots & h_n \end{vmatrix} = \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \binom{n-1}{m} h_{n-m},$$

das ist für  $h_m = x^{m-1}$ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & x \\ 1 & 2 & 1 & \dots & x^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \dots & x^{n-1} \end{vmatrix} = (x-1)^{n-1}.$$

H. 

W. KRETKOWSKI. Ueber einige Formeln der Differentialrechnung. Krak. Denkschr. 1831. (Polnisch.)

Die Schrift enthält allgemeine Formeln für die höheren Differentialquotienten zusammengesetzter und unentwickelter Functionen. Die allgemeine Aufgabe ist die folgende: „Es ist

$$w = F(u_1, u_2, \dots, u_m) \text{ und } u_l = f_l(z), \quad l = 1, 2, \dots, m.$$

Man soll den Differentialquotienten  $n^{\text{ter}}$  Ordnung  $D_z^n w$  der Function  $w$  nach der unabhängigen Variablen  $z$  durch die partiellen









resp. allgemeine homogene Functionen zweiter Ordnung von  $\frac{d}{dx}$ ,  $\frac{d}{dy}$ ,  $\frac{d}{dz}$  und  $x, y, z$  sind. Endlich wird auch bewiesen, dass

$$\begin{vmatrix} \frac{d}{dx_1} & \frac{d}{dx_2} & \cdots & \frac{d}{dx_n} \\ \frac{d}{dx_n} & \frac{d}{dx_1} & \cdots & \frac{d}{dx_{n-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d}{dx_2} & \frac{d}{dx_3} & \cdots & \frac{d}{dx_1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ x_n, x_1, \dots, x_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_2, x_3, \dots, x_1 \end{vmatrix} = n^n.$$

Glr. (O.).

W. H. L. RUSSELL. On the calculus of finite differences.

Mess. (2) XI. 33-36.

Der Verfasser giebt erstens die Werte von

$$\Delta^n \frac{1}{x}, \Delta^n \frac{1}{x^2}, \Delta^n \frac{1}{x^3}, \Delta^n \Gamma(x) \dots \Delta^n \frac{1}{a^x + 1}, \dots;$$

zweitens betrachtet er die Bedingungen, unter denen ein rationaler Bruch in endlicher Form integrirt werden kann; drittens endlich giebt er die Integrale einiger Ausdrücke, in denen Sinus und Cosinus vorkommen.

Glr. (O.).

### Capitel 3.

#### Integralrechnung.

V. VOLTERRA. Sui principii del calcolo integrale.

Batt. G. XIX. 333-372.

Dini hat in seinem Werke: „Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali“ p. 276 gezeigt, dass das Differential einer Function nicht ein Integral im Sinne Riemann's zu haben braucht. Die gegenwärtige Abhandlung weist Beispiele solcher Functionen auf, wo die Inversion der Differentiation mehr







$$\int e^{\frac{1}{2}x^2} dx = e^{\frac{1}{2}x^2} \{x^{-1} + 1 \cdot x^{-3} + 1 \cdot 3 \cdot x^{-5} + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^{-7} + \dots\}.$$

0.

S. GUNDELFINGER. Ueber mehrfache Integrale, welche durch eine Transformation der Variabeln ihre Gestalt nicht ändern. Kronecker J. XCI. 215-220.

Es wird folgender Satz bewiesen: Zwischen  $m$  Veränderlichen  $x_1, x_2, \dots, x_m$  mögen eine homogene Gleichung zweiten Grades und  $m-2$  homogene lineare Gleichungen bestehen:

$$(1) \quad f \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{mm}x_m^2 = 0,$$

$$(1^a) \quad \begin{cases} v \equiv v_1x_1 + v_2x_2 + \dots + v_mx_m & = 0, \\ w \equiv w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_mx_m & = 0, \\ \vdots & \vdots \\ t \equiv t_1x_1 + t_2x_2 + \dots + t_mx_m & = 0. \end{cases}$$

In beliebigen  $m-2$  dieser Relationen seien die Coefficienten  $a, v, \dots, t$  homogene Functionen ersten Grades, die übrigen zweiten Grades von  $m$  anderen Veränderlichen  $y_1, y_2, \dots, y_m$ , so dass vorstehende Gleichungen die Form haben:

$$(2) \quad \begin{cases} v_1y_1 + v_2y_2 + \dots + v_my_m = 0, \\ w_1y_1 + w_2y_2 + \dots + w_my_m = 0, \\ \vdots \\ t_1y_1 + t_2y_2 + \dots + t_my_m = 0, \\ a_{11}y_1^2 + a_{12}y_1y_2 + \dots + a_{mm}y_m^2 = 0. \end{cases}$$

Nimmt man ferner zwischen den  $x$  und den  $y$  zwei willkürliche Beziehungen an:

$$(3) \quad \mathfrak{P}(x_1, \dots, x_n) = 0; \quad P(y_1, \dots, y_n) = 0$$

derart, dass  $\mu P + 1$  (resp.  $\nu \mathfrak{P} + 1$ ) eine homogene Function  $\mu^{\text{ten}}$  (resp.  $\nu^{\text{ten}}$ ) Grades der  $y$  (resp. der  $x$ ) repräsentirt, so wird für eine beliebige Function  $U$  der Integrationsveränderlichen das  $(m-1)$ -fache Integral

$$J = \iint \dots \int \frac{U dy_1 dy_2 \dots dy_{m-1}}{P'(y_m) \sqrt{A}}$$

unter Vermittelung der Beziehungen (1) bis (3) übergeführt in

$$J = \iint \dots \int \frac{U dx_1 dx_2 \dots dx_{m-1}}{\mathfrak{P}'(x_m) \sqrt{\mathfrak{A}}},$$

wo

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & v_1 & \dots & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & v_2 & \dots & t_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} & v_m & \dots & t_m \\ v_1 & v_2 & \dots & v_m & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_m & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

und  $\mathfrak{A}$  die entsprechende Bedeutung in den Coefficienten von (2) hat.

Zum Beweise dient u. a. der folgende Satz. Für ein Wertsystem  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , welches die  $m-1$  Gleichungen (1) ( $1^a$ ) befriedigt, ist bei völliger Willkürlichkeit der  $u$

$$\frac{1}{4} (\Sigma \pm (f'(x_1)v_2 w_3 \dots t_{n-1} u_n))^2 = (-1)^{m+1} (u_1 x_1 + \dots u_m x_m)^2 A.$$

Derselbe wird sodann bewiesen, und die daraus folgende Verallgemeinerung eines Aronhold'schen Satzes (l. c. LXI. 103) abgeleitet. Erfüllen die  $x$  sämtliche Gleichungen (1) ( $1^a$ ), angenommen die erste Relation in ( $1^a$ ), und setzt man

$$F_r = \frac{1}{2} \left( c_1^{(r)} \frac{\partial f}{\partial x_1} + c_2^{(r)} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots c_m^{(r)} \frac{\partial f}{\partial x_m} \right),$$

$$W_r = (c_1^{(r)} w_1 + c_2^{(r)} w_2 + \dots c_m^{(r)} w_m) \text{ etc. etc.,}$$

wo die  $c$  (für  $r = 1, 2, \dots, m-2$ ) willkürliche Grössen bedeuten, so wird das Integral

$$J = \int \frac{\Sigma \pm (c_1^{(1)} c_2^{(2)} \dots c_{m-2}^{(m-2)} x_{m-1} dx_m)}{(v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots v_m x_m) \Sigma \pm (W_1 \dots T_{m-3} F_{m-2})}$$

identisch mit

$$\frac{1}{\sqrt{(-1)^{m+1} A}} \log \left( \frac{\xi_1 f'(x_1) + \xi_2 f'(x_2) + \dots \xi_m f'(x_m)}{v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots v_m x_m} \right),$$

worin  $\xi_1, \dots, \xi_m$  ein Wertsystem bedeutet, welches sämtlichen Gleichungen (1) ( $1^a$ ) Genüge leistet. H.

C. V. Boys. An integrating machine. Phil. Mag. 1881.

Die hier beschriebene Maschine ist eine genaue mechanische





z. B.

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} 2n(2n+1)(2n+3)2^{-2n-3}S_{2n+3} = 3,$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} 2n(2n+1)(2n+3)S_{2n+3} = \frac{51}{16}.$$

H.

N. SONINE. Note sur une formule de Gauss. S. M. F. Bull. IX. 162-166.

Aus der Relation  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  wird die Relation

$$\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-x}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(x)$$

durch blosse Functionsschlüsse ohne Anwendung von Integralen hergeleitet. Da erstere Relation eine periodische Function als Factor unbestimmt lässt, so ergab sich der Wert der linken Seite der letzteren zunächst mit einem periodischen Factor, der dann bestimmt wird.

H.

GYLDÉN. Sur l'intégrale eulérienne de seconde espèce. C. R. XCII. 897-901, 942-943.

Die numerische Berechnung des Integrals

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\eta x}}{(1+x)^{\lambda}} dx$$

bot nach den bisherigen Methoden für grosse Werte der Parameter  $\eta$  und  $\lambda$  bedeutende Schwierigkeiten. Herr Gyldeén zeigt, wie durch Anwendung der von Herrn Hermite (Borchardt J. XC., s. diesen Band Abschn. VII. Cap. 2) gegebenen Zerlegung der Function

$$\mathfrak{Q}(x) = \mathfrak{Q}_0 + \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2 + \dots$$

diese Berechnung wesentlich erleichtert wird. Es wird der spezielle Fall

$$\mathfrak{Q}(0) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi} d\xi}{\xi} = -\lim(e^{-a})$$

durchgeführt.

M.

H. STABENOW, A. L. SELBY. Solution of a question (6378). Ed. Times XXXIV. 75-76.

Wenn  $n > 1$ , so ist

$$\int_0^1 (1-x)^{n-2} dx \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{(1-x^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}n}} = \frac{1}{4} \pi \left\{ \frac{\Gamma \frac{1}{2}(n-1)}{\Gamma \frac{1}{2}(n)} \right\}.$$

0.

A. BERGER. Sur quelques applications de la fonction Gamma. Up. N. Act. XI.

M. L.

J. W. L. GLAISHER. On some definite integrals expressible in terms of the first complete elliptic integral and of gamma functions. Lond., M. S. Proc. XIII. 92-99.

Durch Substitution und Integration wird zuerst die Formel hergeleitet:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x^2 + 2x^2 y^2 \cos 2\gamma + y^2) dx dy = \frac{1}{2} F'(\sin \gamma) \int_0^\infty \varphi(t^2) dt,$$

wo  $F'$  die Legendre'sche Bedeutung hat für den Modul  $\sin \gamma$ , und angewandt auf Fälle bekannter Werte des Integrals zur Rechten, dann transformirt in

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi\{(x^2 + a^2 y^2)(x^2 + b^2 y^2)\} dx dy = \frac{1}{2} F(a, b) \int_0^\infty \varphi(t^2) dt,$$

wo

$$F(a, b) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \vartheta + b^2 \sin^2 \vartheta}}$$

und durch Verbindung beider Formen ein Beweis für den Gauss'schen Satz gewonnen:

$$F(a, b) = F\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right).$$























































$$(1) \quad \sum_{r=1}^{\mu} M_r \int_{\xi_r}^{x_r} \frac{\psi(x_r) dx_r}{f(x_r) P(x_r)^{\frac{1}{n}}} = \frac{\psi(a_1)}{f_1(a_1)} \sum_{r=1}^{\mu} \varepsilon_r \log(z_1 - \varepsilon_r) + \dots$$

$$+ \frac{\psi(a_k)}{f_1(a_k)} \sum_{r=1}^{\mu} \varepsilon_r \log(z_k - \varepsilon_r) + \text{const.}.$$

Hier sind

$$f(x) = (x - a_1) \dots (x - a_k),$$

$M_1, \dots, M_\mu$  positive ganze Zahlen,  $\xi_1, \dots, \xi_\mu$  Constante, und

$$\varepsilon_r = e^{\frac{2\pi r}{n} \sqrt{-1}}.$$

$z_r$  wird durch die Gleichung

$$z_r = P(a_r)^{\frac{1}{n}} : \varphi(a_r)$$

bestimmt, worin  $\varphi(x)$  durch die Gleichung

$$G(x - x_1)^{M_1} \dots (x - x_\mu)^{M_\mu} = P(x) - [\varphi(x)]^n$$

definirt ist. Die Anzahl der hierfür zu erfüllenden Bedingungs-  
gleichungen  $M_1 + \dots + M_\mu$  ist im Allgemeinen grösser als die  
Zahl der Coefficienten in  $\varphi$ , und die Elimination der letzteren  
gibt Gleichungen zwischen den oberen Integrationsgrenzen  $x_r$   
in (1), die das Multiplicationstheorem in der allgemeinsten Form  
enthalten. Die zweite Note enthält eine Anwendung der Gleichung (1).  
Setzt man

$$(2) \quad y_r = e^{\int_{\xi_r}^{x_r} \frac{\psi(x_r) dx_r}{f(x_r) P(x_r)^{\frac{1}{n}}}} \quad (r = 1, 2, \dots, \mu),$$

wo  $X_r$  das Integral einer rationalen Function von  $x_r$ , also eine  
Summe von logarithmischen und rationalen Functionen bedeutet,  
dann genügen die  $y_r$  dem simultanen System

$$\frac{d^n y_r}{dx_r^n} + p_1^{(r)} \frac{d^{n-1} y_r}{dx_r^{n-1}} + \dots + p_n^{(r)} y_r = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, \mu),$$

worin  $p_1^{(r)}, \dots, p_n^{(r)}$  rationale Functionen von  $x_r$  sind. Das Pro-  
duct der  $\mu$  Lösungen (2) derselben nimmt wegen (1) die  
Form an:

$$y_1 y_2 \dots y_\mu = e^{\sum_{r=1}^{\mu} X_r + J - J_0},$$









































erhalten werden, wenn man das Product der Integrale der letzteren  $v_1, v_2 = z$  setzt. Es werden für alle drei Fälle  $v_1$  und  $v_2$  als Functionen von  $z$  in Wurzelausdrücken (und dadurch auch als Functionen von  $t$ ) bestimmt, und aus diesen Ausdrücken ergibt sich der von je einer binären Form, die einer Constanten gleich ist, während die entsprechende Hesse'sche Form gleich  $t$ , multiplicirt mit einer Constanten ist. Führt man in (1)  $\xi = t^2$  statt der unabhängigen Variablen ein, so geht (1) über in die hypergeometrische Differentialgleichung

$$(2) \quad \frac{d^2 v}{d\xi^2} + \frac{1}{6} \frac{4-7\xi}{6\xi(1-\xi)} + \frac{1}{72} \frac{1}{\xi(1-\xi)} = 0.$$

Es wird nun eine eingehende Untersuchung aller Fälle angestellt, in denen die Gleichung (2) durch die Substitutionen  $\xi = \psi(x)$ ,  $y = wv$ , wo  $w$  eine Function von  $x$  ist, unter der Bedingung, dass  $\psi$  rational ist, in sich selbst oder in eine solche, die aus (2) durch die lineare Substitution

$$\xi = \frac{c-b}{c-a} \frac{x-a}{x-b}$$

hervorgeht, übergeführt wird. Aus den Werten von  $w$  erhält man die Integrale der verschiedenen linearen Differentialgleichungen der letzteren Form, da die particulären Integrale  $v_1, v_2$  von (1) oder (2) bekannt sind. Diese Differentialgleichungen sind diejenigen, welche die des Tetraeders, Octaeders und Ikosaeders für  $n = 4, 6, 12$  genannt werden. Hr.

G. HALPHÉN. Sur une classe d'équations différentielles linéaires. C. R. XCII. 779-782.

Sind  $P = ax + b$  und  $Q = a'x + b'$  zwei Binome ersten Grades,  $h, k, \dots B, C, \dots$  Constanten, dann haben die Gleichungen von der Form

$$(1) \quad \dots BQ^h P^{n-h} \frac{d^n [P^h Q^{n-h} y]}{dx^n} + CQ^k \frac{d^p [P^k Q^{p-k} y]}{dx^p} + \dots = 0$$

zum allgemeinen Integral

$$y = C_1 P^{a_1} Q^{1-a_1} + C_2 P^{a_2} Q^{1-a_2} + \dots,$$

wo  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  die Wurzeln der Gleichung

$$\dots B(ab' - a'b)^n(\alpha + h)(\alpha + h - 1) \dots (\alpha + h - n + 1) \\ + C(ab' - a'b)^p(\alpha + k)(\alpha + k - 1) \dots (\alpha + k - p + 1) + \dots = 0$$

sind. Es ist zu bemerken, dass die Constanten  $h, k \dots$  beliebig geändert werden können, ohne dass die Gleichung (1) geändert wird, wofern nur gleichzeitig auch  $B, C \dots$  so modificirt werden, dass die charakteristische Gleichung für die  $\alpha$  dieselbe bleibt. Fallen die Binome  $P$  und  $Q$  zusammen, dann ist das allgemeine Integral

$$y = C_1 \frac{1}{P} e^{\frac{\alpha_1}{P}} + C_2 \frac{1}{P} e^{\frac{\alpha_2}{P}} + \dots,$$

wo die  $\alpha$  durch die Gleichung

$$\dots B(-a\alpha)^n + C(-a\alpha)^p + \dots = 0$$

bestimmt sind. Um die adjungirte Gleichung von (1) zu erhalten, hat man nur  $P$  und  $Q$  mit einander zu vertauschen und die Vorzeichen der die Derivirten von ungrader Ordnung enthaltenden Glieder zu verändern. Hr.

A. STEEN. En lineär Differentialligning af Halphén.

Zeuthen T. (4) V. 177-181.

Darlegung der von Halphén gefundenen Resultate über die Differentialgleichung

$$\sum P_\nu (ax + b)^{\nu - p_\nu} (a_1 x + b_1)^{p_\nu} \frac{d^\nu [(ax + b)^{p_\nu} (a_1 x + b_1)^{\nu - p_\nu} y]}{dx^\nu} = 0.$$

Gm.

A. STEEN. En mærkelig Ligestorhed imellem visse Differentialkoefficienter af to Funktioner. Zeuthen T. (4) V. 101-109.

Wie von Herrn Hansted bemerkt ist, werden die beiden Ausdrücke

$$y = D_x^n (x-a)^{n+r} (x-b)^{n+s} \text{ und } y = D_x^m (x-a)^{m+r} (x-b)^{m+s},$$



















N. HERZ. Ueber Integrale einiger Differentialgleichungen.

Hoppe Arch. LXVII. 312-324.

Das Integral der Gleichung

$$X = Ay + B \frac{dy}{dx} + C \frac{d^2y}{dx^2} + \dots + N \frac{d^n y}{dx^n},$$

wo  $A, B, \dots, N$  constant sind, lautet bekanntlich für den Fall, dass die Gleichung

$$P_n = A + B\alpha + \dots + N\alpha^n$$

lauter ungleiche Wurzeln  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  besitzt:

$$y = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \frac{1}{P'_n(\alpha_\rho)} e^{\alpha_\rho x} \int X e^{-\alpha_\rho x} dx.$$

Sind nun die Coefficienten derart beschaffen, dass man die unendliche Reihe

$$(1) \quad P = A + B\alpha + C\alpha^2 + \dots \text{ in inf.}$$

durch einen geschlossenen Ausdruck darstellen und die Nullpunkte desselben angeben kann, so wird man auch das Integral der Differentialgleichung

$$(2) \quad X = Ay + B \frac{dy}{dx} + C \frac{d^2y}{dx^2} + \dots \text{ in inf.}$$

erhalten können. Dasselbe erscheint dann in der Form einer unendlichen Summe von Integralausdrücken, über deren Convergenz keine Untersuchung angestellt wird. Bedenklicher erscheint dem Referenten die Bemerkung, dass, wenn die Wurzeln  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  der Gleichung (1) innerhalb des Convergenzbereiches der Reihe  $P$ , die übrigen Wurzeln aber ausserhalb fallen, die Differentialgleichung (2) das particuläre Integral

$$y = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \frac{1}{P'(\alpha_\rho)} e^{\alpha_\rho x} \int X e^{-\alpha_\rho x} dx$$

habe, da man von dem allgemeinen Integral einer vollständigen linearen Differentialgleichung mit constanten Coefficienten durch Ausschliessung einiger Wurzeln der zugehörigen algebraischen Gleichung kein particuläres Integral erhalten kann.

In ähnlicher Weise wird die Laplace'sche Methode der Integration der Gleichung

$$(a_0 + b_0 x)y + (a_1 + b_1 x) \frac{dy}{dx} + (a_2 + b_2 x) \frac{d^2 y}{dx^2} + \dots = 0$$

auf Gleichungen dieser Form mit unendlich vielen Gliedern ausgedehnt. Hr.

WOLSTENHOLME. Note on linear differential equations with constant coefficients. Ed. Times XXXIV. 23.

Die zu lösende Differentialgleichung lautet, symbolisch geschrieben,

$$f(D) = \cos nx \text{ oder } \sin nx,$$

wo  $f$  eine ganze rationale Function von  $D$  mit constanten Coefficienten bedeutet und  $\frac{d^p y}{dx^p}$  für  $D^p$  zu setzen ist. Man zerlege

$f(D)$  in  $\varphi_1(D^2)$  und  $D\varphi_2(D^2)$ , dann sind die resp. Integrale

$$y_1 = \frac{1}{f(D)} \cos nx = \frac{\varphi_1(-n^2) \cos nx + n\varphi_2(-n^2) \sin nx}{[\varphi_1(-n^2)]^2 + n^2[\varphi_2(-n^2)]^2},$$

$$y_2 = \frac{1}{f(D)} \sin nx = \frac{\varphi_1(-n^2) \sin nx - n\varphi_2(-n^2) \cos nx}{[\varphi_1(-n^2)]^2 + n^2[\varphi_2(-n^2)]^2}.$$

Diese Formeln sind nicht anwendbar, wenn  $f(-n^2) = 0$ ; in diesem Falle ist

$$f(D) = (D^2 + n^2)^r \varphi(D).$$

Man wird dann nach dem Obigen erst mit  $\frac{1}{\varphi(D)}$  operiren und dann die Formel

$$\frac{1}{(D^2 + n^2)^r} \cos nx = \frac{1}{2} \frac{x^r}{r!} \left( \frac{e^{nix}}{(2ni)^r} + \frac{e^{-nix}}{(-2ni)^r} \right)$$

und eine ähnliche für  $\sin nx$  anwenden. Hr.

B. HANSTED. Nogle Transformationer af den lineære Differentialligning med konstante koefficienter

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

ved Substitution af en ny Variabel. Zenthen T. (4) V. 5-12.

Die hier gegebenen Aenderungen fließen unmittelbar aus der





unter Benutzung von Formeln, die allein aus  $A = 0$  hergeleitet sind, aus der Gleichung der Evolute dieselbe Lösung erhalten kann, wie durch Integration von  $Ap = 0$ , wodurch die Identität von  $A = 0$  und  $Ap = 0$  direct bestätigt wird. Zum Schluss spricht der Verfasser Herrn Challis in Bezug auf die Integrationsmethode mit Hülfe der Evolute die Originalität ab, da in der Abhandlung von Delaunay, Liouville J. VI. 309 dieselbe Methode angewendet ist. Hr.

A. WINCKLER. Die Integration linearer Differentialgleichungen und der Herr Prof. Simon Spitzer in Wien. Wien. A. Hölder.

Antwort auf die in dem Buche des Herrn Spitzer: „Integration partieller Differentialgleichungen“ (s. F. d. M. XI. 1879. 253) enthaltenen Angriffe auf Herrn Winckler. Hr.

S. SPITZER. Neue Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen. Erste Fortsetzung. Wien. Carl Gerold's Sohn.

Das unter dem Titel: „Neue Studien etc.“ im Jahre 1874 (cf. F. d. M. VI. 1874. 274) erschienene Werk des Verfassers besteht aus fünf Abschnitten. Die vorliegende Fortsetzung enthält die Abschnitte VI. bis X. Im sechsten werden Differentialgleichungen construiert, deren particuläre Integrale eine vorausgesetzte Form haben. Der siebente Abschnitt beschäftigt sich mit der Integration der Gleichung

$$xy''' + ay'' - bxy = 0,$$

die erst durch unendliche Reihen, dann nach der Laplace'schen Methode mittels eines bestimmten Integrals bewerkstelligt wird. Der achte Abschnitt enthält Bemerkungen über die Gleichung

$$a_2 + b_2x + c_2x^2 + (a_1 + b_1x)y' + a_0y = 0.$$

Die Integrationsmethode besteht hier darin, dass man nach  $\lambda$ -mali-









und  $a, b, c$  durch

$$a^2 + b^2 + c^2 - \frac{2m}{m+1} (ab + bc + ca) = 0$$

mit einander verbunden, dann ist immer

$$\sqrt{ap + bq + cr} = \sqrt{U} \sqrt{p + \beta q} + \sqrt{V} \sqrt{p + \frac{1}{\beta} q},$$

wo

$$\beta + \frac{1}{\beta} = \frac{2m}{m+1}, \quad U + V = a - mc, \quad \beta U + \frac{1}{\beta} V = b - mc$$

ist.“ Diese Formel ist u. A. anwendbar, wenn  $p, q, r$  drei Wurzeln einer Gleichung vierten Grades sind, in der der zweite und dritte Coefficient gleich Null sind; für  $m$  ist dann  $\frac{1}{2}$  zu setzen.

Hr.

J. COCKLE. Transformation of differential equations.

Mess. (2) XI. 109-111.

Die Arbeit bezieht sich auf die Transformation linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die verschiedenen Formen werden classificirt. Die Gleichungen hängen mit denen zusammen, die von Rawson und Cayley betrachtet worden sind. Siehe das folgende Referat. Glr. (O.).

R. RAWSON. On the first resolvent of the quartic

$$y^4 + ay^2 + x_1 y - \frac{1}{12} a^2 = 0.$$

Mess. (2) XI. 19-23.

Es wird bewiesen, dass jede Wurzel dieser Gleichung ein particuläres Integral der Differentialgleichung

$$\frac{8a^3 + 27x_1^2}{6a \frac{dx_1}{dx}} \frac{dy}{dx} + y^2 - \frac{3x_1 y}{2a} + \frac{a}{2} = 0$$

ist.

Glr. (O.).



















































riationen von  $V$  zum Verschwinden gebracht werden können, wenn  $\delta^x y = \varepsilon^x u_x$  gesetzt wird für jedes  $x$ , welches kleiner als  $m$ . Die  $(2m)^{\text{te}}$  Variation von  $V$  wird für alle beliebigen Werte der Variationen  $\delta^m y, \delta^{m+1} y, \dots$  nur dann grösser als 0 sein, wenn  $\frac{d^{2m-1}y}{dc^{2m-1}}$  und  $\frac{dy'}{dc}$  für  $x = x_1$  verschiedenes Zeichen haben. Verschwindet  $\frac{d^{2m-1}y}{dc^{2m-1}}$  für  $x = x_1$ , so kann auch die  $(2m)^{\text{te}}$  Variation zum Verschwinden gebracht werden.

Dieser Satz wird dann geometrisch interpretirt und schliesslich auf das Problem des Princips der kleinsten Wirkung für die Bewegung eines von einem festen Punkte angezogenen Körpers angewendet, wenn die Anziehung entweder umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung oder direct proportional derselben geschieht.

T.

-----

# **Siebenter Abschnitt.**

## **Functionentheorie.**

### **Capitel 1.**

#### **A l l g e m e i n e s.**

**E. JABLONSKI.** Note sur les limites et les nombres incommensurables. *Nouv. Ann.* (2) XX. 241-250.

Kurze Zusammenstellung der Sätze über Grenzbetrachtungen nebst einigen Anwendungen, z. B. auf die Subtraction zweier Zahlen, welche beide rational sind. No.

---

**K. WEIERSTRASS.** Remarques sur quelques points de la théorie des fonctions analytiques. *Darb. Bull.* (2) V. 157-183.

Uebersetzung der Abhandlung „Zur Functionenlehre“ aus den *Berl. Monatsber.* 1880, 719-743, (s. *F. d. M.* XII. 1880. 310) und der folgenden Mitteilung aus den *Berl. Monatsber.* 1881. M.

---

**K. WEIERSTRASS.** Mitteilung zur Functionenlehre.

*Berl. Monatsber.* 1881. 228-230.

Herr Tannery hat Herrn Weierstrass darauf aufmerksam gemacht, dass die in § 4 der Abhandlung „Zur Functionenlehre“ (*Berl. Monatsber.* 1880, s. *F. d. M.* XII. 1880. 310) aus rationalen Functionen einer Veränderlichen  $x$  gebildete unendliche Reihe, welche







CH. HERMITE. Sur quelques points de la théorie des fonctions. Darb. Bull. (2) V. 312-320.

Ausführlicher Bericht des Herrn Tannery über die soeben besprochene Mitteilung des Herrn Hermite an Herrn Mittag-Leffler, die auch Act. Soc. Sc. Fenn. t. XII. erschienen ist.

M.

U. DINI. Alcuni teoremi sulle funzioni di una variabile complessa. Chelini, Coll. Math. 258-276.

In der bekannten Abhandlung von Herrn Weierstrass (Beih. Abh. 1876) sind Functionen dargestellt, die in der ganzen Ebene eindeutig sind und in beliebig gegebenen Punkten in endlich Ordnung unendlich werden. Speciell Functionen dieser Art, zu denen die Jacobi'sche  $\wp$ -Function gehört, hatte schon Herr Betti untersucht (Annali di Tortolini vol. III. p. 82). Eine Modification des Betti'schen Verfahrens führt den Herrn Verfasser auch zur Construction der allgemeinen Weierstrass'schen Function. Eine Function, die nur in den Punkten  $z = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$  Null wird resp. in der Ordnung  $m_1, m_2, \dots, m_n, \dots$ , wird in der Form vorausgesetzt

$$\prod \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right)^{m_n} \cdot e^{\varphi_n(z)},$$

wo  $\varphi_n(z)$  eine ganze Function ist. Der Convergenzfactor  $e^{\varphi_n}$  wird nun so bestimmt, dass nicht nur die Reihe der Logarithmen sondern auch die Reihe ihrer Derivirten, dass also die zwei Reihen

$$\sum \left\{ m_n \log \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right) + \varphi_n(z) \right\} \text{ und } \sum \left\{ -\frac{m_n}{\alpha_n - z} + \varphi'_n(z) \right\}$$

unbedingt und gleichmässig convergiren (Herr Betti hatte nur die erste Reihe in Betracht gezogen und daher nur engere Resultate erhalten). Das nämliche Princip dient alsdann zur Herleitung des von Herrn Mittag-Leffler gegebenen Satzes, nach welchem immer eine Function existirt, die in beliebig gegebenen Punkten  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$  unendlich wird in der Ordnung





halb des Intervalles  $t_1 \dots t_2$  annimmt. In vorliegender Note wird die folgende Verallgemeinerung dieses Satzes aufgestellt und bewiesen:

„Es seien  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$   $n$  Functionen derselben stetig veränderlichen Grösse  $t$ , welche nebst ihren Ableitungen bis zur  $(n-1)^{\text{ten}}$  einschliesslich für alle in Betracht kommenden Werte des Argumentes  $t$  endlich, stetig und eindeutig sind. Sowohl die Grösse  $t$ , als auch die betrachteten Functionen nehmen nur reelle Werte an. Unter diesen Voraussetzungen ist, wenn  $t_1, t_2, \dots, t_n$   $n$  von einander verschiedene, dem Intervalle  $a \dots b$  angehörende Werte des Argumentes  $t$  bezeichnen, der Wert des Quotienten

$$\frac{\begin{vmatrix} f_1(t_1), f_2(t_1), \dots, f_n(t_1) \\ f_1(t_2), f_2(t_2), \dots, f_n(t_2) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_1(t_n), f_2(t_n), \dots, f_n(t_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1, t_1, \dots, t_1^{n-1} \\ 1, t_2, \dots, t_2^{n-1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1, t_n, \dots, t_n^{n-1} \end{vmatrix}}$$

nicht grösser als  $\frac{g}{1!2!3! \dots (n-1)!}$  und nicht kleiner als

$\frac{k}{1!2!3! \dots (n-1)!}$ , wo  $g$  den grössten,  $k$  den kleinsten unter denjenigen Werten bezeichnet, welche die Determinante

$$\begin{vmatrix} f_1(t') & , & f_2(t') & , & \dots & f_n(t') \\ f_1'(t'') & , & f_2'(t'') & , & \dots & f_n'(t'') \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1^{(n-1)}(t^{(n)}) & , & f_2^{(n-1)}(t^{(n)}) & , & \dots & f_n^{(n-1)}(t^{(n)}) \end{vmatrix}.$$

in dem Gebiete

$$a \leq t' \leq b, \quad t' \leq t'' \leq b, \quad t'' \leq t''' \leq b, \quad \dots \quad t^{(n-1)} \leq t^{(n)} \leq b$$

annimmt.“ Von diesem Satze werden zwei geometrische Anwendungen gemacht, welche eine fundamentale Eigenschaft der Schmiegungebenen und Schmiegunskugeln einer Raumcurve ergeben.

Hz.



E. SCHERING. La formule d'interpolation de M. Hermite exprimée algébriquement. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. C. R. XCII. 510-513.

Der von Herrn Hermite (Sur la formule d'interpolation de Lagrange, Borchardt J. LXXXIV. 70; s. F. d. M. IX. 1877. 312) gegebene Ausdruck einer algebraischen Function, deren Wert zugleich mit den Werten mehrerer ihrer Ableitungen vorgeschrieben war, enthält ein Integral

$$\int \frac{f(z)\varphi(x)dz}{(x-z)\varphi(z)}.$$

Herr Schering ersetzt diese Darstellung durch eine rein algebraische von der Form:

$$F(x) = \sum_{\sigma=1}^t \varphi_{\sigma}(x) \left\{ \mathfrak{P} \left[ \frac{F_{\sigma}(x)}{\varphi_{\sigma}(x)} | x - a_{\sigma} | - 1 \right] + \psi_{\sigma}(x) \right\},$$

wo

$$\varphi_{\sigma}(x) = \prod_{\varrho=1}^t (x - a_{\varrho})^{1+n_{\varrho}} \varphi_{\sigma,\varrho}(x)$$

ist, und die eindeutigen willkürlichen Functionen  $\varphi_{\sigma,\varrho}(x)$  und  $\psi_{\sigma}(x)$  für hinreichend kleine Werte des Moduls von  $(x - a_r)$  nach Potenzen von  $(x - a_r)$  mit nicht negativen Exponenten entwickelbar sind, und wo die Functionen  $\mathfrak{P}$  definirt werden durch die Gleichungen

$$\mathfrak{P}[F(x) | x - a | n] = \sum_{\mu=-M}^{\nu} A_{\mu}(x - a)^{\mu}$$

oder

$$\mathfrak{P} \left[ F(x) \left| \frac{1}{x} \right| n \right] = \sum_{\mu=-m}^{\nu} B_{\mu} \left( \frac{1}{x} \right)^{\mu}.$$

Herr Schering nennt diese Functionen „Berührungsfunktionen“ für die Function  $F(x)$ :

$$F(x) = \sum_{\mu=-M}^{+N} A_{\mu}(x - a)^{\mu} \text{ oder } F(x) = \sum_{\mu=-m}^{+n} B_{\mu} \left( \frac{1}{x} \right)^{\mu};$$

$\nu$  bezeichnet den grössten Wert, den der Exponent  $\mu$  annehmen kann, ohne den Wert  $n$  zu überschreiten. M.





















$$e_\mu = u_\mu^{(1)} + u_\mu^{(2)} + \dots + u_\mu^{(p)}$$

(unter  $u_\mu^{(1)}, \dots, u_\mu^{(p)}$  die Werte von  $u_\mu$  in  $p$  den Punkten  $\sigma_1, z_1; \sigma_2, z_2; \dots, \sigma_p, z_p$  von  $\mathfrak{Z}$  verstanden); ferner

$$\omega_\mu = g_\mu i\pi + h_1 u_{\mu 1} + h_2 u_{\mu 2} + \dots + h_p u_{\mu p}, \quad (g, h \text{ ganze Zahlen});$$

setzt man endlich für das System

$$(u_1 - e_1, u_2 - e_2, \dots, u_p - e_p)$$

kurz  $(u - e)$  und analog für

$$\left(u_1 - e_1 + \frac{\omega_1}{2}, u_2 - e_2 + \frac{\omega_2}{2}, \dots, u_p - e_p + \frac{\omega_p}{2}\right),$$

kurz  $\left(u - e + \frac{\omega}{2}\right)$ , und ist

$$\Sigma h u = h_1 u_1 + h_2 u_2 + \dots + h_p u_p,$$

so hat man für  $s$  den Ausdruck

$$s = \frac{e^{\Sigma h u} \wp\left(u - e + \frac{\omega}{2}\right)}{\wp(u - e)} + \frac{e^{\Sigma h u'} \wp\left(u' - e + \frac{\omega}{2}\right)}{\wp(u' - e)} + \frac{e^{\Sigma h u''} \wp\left(u'' - e + \frac{\omega}{2}\right)}{\wp(u'' - e)},$$

wo  $u, u', u''$  die Werte von  $u$  in drei übereinander liegenden (also einem Werte  $z$  entsprechenden) Punkten  $\sigma, \sigma', \sigma''$  der Fläche  $\mathfrak{Z}$  bedeuten. Die in obiger Formel auf der rechten Seite stehenden Quotienten sind algebraische Functionen von  $\sigma, z; \sigma', z; \sigma'', z$ . Bezeichnet man ihre Quadrate mit  $f, f', f''$ , so ergibt sich für die obige Formel die Gleichung:

$$s^4 - 2(f + f' + f'')s^2 - 8\sqrt{ff'f''}s + (f + f' + f'')^2 - 4(f'f'' + f''f + ff') = 0,$$

deren Coefficienten jetzt in  $z$  rational sind.

Aus beiden Formeln ergibt sich die Discussion der Verzweigung der vierblättrigen Fläche  $(s, z) = 0$ , wobei man es durch die Wahl der Grössen  $h_i, g_i$  in der Hand hat, die bei  $k_1, k_2, \dots, k_{2p+4}$  statthabenden Verzweigungen auf alle mögliche Weisen in den vier Blättern zu verteilen.

Den Schluss der Abhandlung bildet ein Beispiel für eine vierblättrige Fläche vom Geschlechte Null.









gegeben, ist ferner  $f(x)$  integrirbar und

$$\int_0^a \frac{d\alpha}{\alpha} \bmod.[f(\alpha)-f(0)]$$

convergent, so hat man immer

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \int_0^a d\alpha f(\alpha) \Phi(\alpha, h) = f(0) \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_0^a \Phi(\alpha, h).$$

Einen ganz ähnlichen Satz hat auch Herr Dini (Serie di Fourier 1880. I. p. 46, s. F. d. M. XII. 177) aufgestellt.

Die dritte Mitteilung beschäftigt sich mit der Frage, welcher Spielraum der Function  $\Phi(x, h)$  gestattet werden kann, wenn die vorstehende Gleichung unter Voraussetzung der abteilungsweisen Monotonie von  $f(x)$  (d. i. der ursprünglichen Dirichlet'schen Bedingung) bestehen soll. Dazu ist notwendig, dass

- 1)  $\lim_{h \rightarrow +\infty} \int_0^a d\alpha \Phi(\alpha, h)$  bestimmt und von  $a$  unabhängig sei;
- 2) für jeden festen Wert  $a > 0$

$$\lim_{a_1 \rightarrow a, h \rightarrow +\infty} \int_a^{a_1} dx \Phi(x, h) = 0$$

sei, während  $a_1, h$  unabhängig von einander zu den bezüglichen Grenzwerten convergiren. St.

J. M. RODRIGUES. Sobre una formula de Wronski.

Teixeira J. III. 55-64. (Portugiesisch.).

Der Verfasser leitet die Integrale einiger Functionen mit Hülfe des Algorithmus der analytischen Facultäten her. Ausgehend von der Wronski'schen Formel

$$\int F(x) dx = \log \{e^{\psi(x_0)}\}^{x|1} + \text{Const.},$$

(wo

$$\psi(x) = F(x) + \frac{1}{2} \frac{dF(x)}{dx} + \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{d^2 F(x)}{dx^2} \dots$$

und nach der Differentiation  $x = x_0$  zu setzen ist), sucht er die Fälle, in denen man die Addition der Reihe mit Hülfe bestimm-



dieses Theorems. Der letzte Teil der Arbeit enthält eine Ableitung der Additionstheoreme der elliptischen Integrale auf Grund des Cauchy'schen Satzes. Hz.

H. LÉAUTÉ. Développement d'une fonction à une seule variable dans un intervalle donné suivant les valeurs moyennes de cette fonction et de ses dérivées successives dans cet intervalle. Résal J. (3) VII. 185-200.

Es soll ein Polynom  $y$  vom Grade  $n$  in  $x$  durch die Bedingung bestimmt werden, dass die mittleren Werte des Polynoms und seiner  $n$  ersten Differentialquotienten in einem gegebenen Intervalle, etwa von  $-h$  bis  $+h$ ,  $n+1$  gegebenen Grössen  $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$  gleich seien. Die zu erfüllenden Gleichungen sind also

$$\frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} \frac{d^x y}{dx^x} = Y_x, \quad x = 0, 1, 2 \dots n.$$

Die Analyse liefert für  $y$  den Ausdruck

$$(1) \quad y = P_0 Y_0 + P_1 Y_1 + \dots + P_n Y_n,$$

worin  $P_x$  ein von den Werten der  $Y$  unabhängiges Polynom vom Grade  $x$  bedeutet, welches durch die  $x+1$  Gleichungen

$$\int_{-h}^{+h} P_x dx = 0, \quad \int_{-h}^{+h} \frac{dP_x}{dx} = 0 \dots \int_{-h}^{+h} \frac{d^x P_x}{dx^x} = 2h$$

vollständig bestimmt ist. Aus ihnen folgt die Relation

$$P_{x-1} = \frac{dP_x}{dx}.$$

Die  $P$  gehören daher in die von Herrn Appell (Ann. de l'Éc. N. (2) IX. 119-144, s. F. d. M. XII. 1880. 312) untersuchte Klasse von Polynomen. Setzt man

$$\varphi(x, z) = P_0 + P_1 z + P_2 z^2 + \dots$$

(erzeugende Function der  $P$ ), so erhält man

$$\varphi(x, z) = \frac{2hz}{e^{hz} - e^{-hz}} e^{xz},$$







$$F(x) = \Sigma A \frac{kk' H(x+a)}{\Theta(a) \Theta''(a)}, \quad G(x) = \Sigma B \frac{kk' \Theta(x+b)}{H(b) H''(b)}$$

betrachtet, in denen

$$A = \frac{1}{\pi} \int_0^{2K} F(x) \frac{H(x-a)}{\Theta(x)} dx, \quad B = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2K} G(x) \frac{\Theta(x-b)}{\Theta(x)} dx,$$

welche gelten, wenn  $F(x)$  und  $G(x)$  eindeutige Functionen sind, die den Bedingungen

$$\begin{aligned} F(x+2K) &= -F(x), & F(x+2iK') &= \mu F(x), \\ G(x+2K) &= +G(x), & G(x+2iK') &= \mu G(x), \end{aligned}$$

worin  $\mu$  constant, genügen, und wenn sie nur eine endliche Zahl von Polen in dem Periodenrechteck  $2K$  und  $2iK'$  zulassen.

Zum Schluss bemerkt Herr Hermite, dass ihn die von Gylden gefundene Lösung der linearen Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - k^2 \frac{\sin x \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} \cdot \frac{dy}{dx} + \mu^2 \operatorname{dn}^2 x \cdot y = 0,$$

nämlich

$$y = C \sin \mu \cdot \operatorname{am} x + C' \cos \mu \cdot \operatorname{am} x,$$

auf die Frage geführt habe, ob sich nicht die Fourier'sche Reihe

$$F(x) = \Sigma [A p \cos p x + B p \sin p x]$$

durch die Formel

$$F(x) = \Sigma [A p \cos p \cdot \operatorname{am} x + B p \sin p \cdot \operatorname{am} x]$$

verallgemeinern lasse.

M.

U. DINI. Intorno agli sviluppi delle funzioni di una variabile reale per serie di funzioni Jacobiane.

Brioschi Ann. (2) X. 145-153.

Anknüpfend an die Formeln für die Entwicklung einer Function nach Jacobi'schen Functionen, wie sie Herr Hermite in seinen Vorlesungen ohne Beweis gegeben und in obigem Briefe weiter entwickelt hat, legt Herr Dini im Vorliegenden die Methoden dar, welche er zum Beweise der Hermite'schen Formeln und zur Herleitung weiterer Entwicklungen befolgt hat. Dieselben sind schon zum Teil in dem Werke: „Serie di Fourier ed altre





















































































$$S(x) = (x - a_{r_1})(x - a_{r_2}) \cdots (x - a_{r_n}),$$

so ist

$$A p_\mu^2 = \frac{R'(a_\mu)}{l_\mu S(a_\mu)} - \sum_{r=r_1}^{r=r_n} l_r \frac{p_{r,\mu}^2}{S'(a_r)},$$

$$\frac{l_\nu}{S(a_\nu)} p_{r,\mu}^2 = \frac{R'(a_\mu)}{l_\mu (a_\mu - a_\nu) S(a_\mu)} - \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{l_r p_{r,\mu}^2}{(a_\nu - a_r) S'(a_r)},$$

$$A p_\mu p_\nu = - \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{l_r p_{r,\mu} p_{r,\nu}}{S'(a_r)}.$$

Die ersten beiden dieser Relationen rühren von Herrn Weierstrass, die letzte von Herrn Brioschi selbst her.

Aus diesen entwickelt der Herr Verfasser nun die Relation

$$0 = - \frac{(a_\mu - a_\nu)^2 l_\mu l_\nu}{S(a_\mu) S(a_\nu)} H^2 + (a_\mu - a_\nu) M H G + M^2 F,$$

wo

$$M = \frac{R'(a_\nu)}{S^2(a_\nu)} + \frac{R'(a_\mu)}{S^2(a_\mu)},$$

$$H = \frac{R'(a_\nu)}{l_\nu S(a_\nu)} \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{l_r p_{r,\mu}^2}{(a_\nu - a_r) S^3(a_r)} + \frac{R'(a_\mu)}{l_\mu S'(a_\mu)} \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{l_r p_{r,\nu}^2}{(a_\mu - a_r) S'(a_r)},$$

$$G = \frac{l_\mu}{S(a_\mu)} \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{(a_\mu - a_r) l_r}{(a_\nu - a_r) S'(a_r)} p_{r,\mu}^2 - \frac{l_\nu}{S(a_\nu)} \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{(a_\nu - a_r) l_r}{(a_\mu - a_r) S'(a_r)} p_{r,\nu}^2,$$

$$F = \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{(a_\mu - a_r) l_r}{(a_\nu - a_r) S'(a_r)} p_{r,\mu}^2 \cdot \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{(a_\nu - a_r) l_r}{(a_\mu - a_r) S'(a_r)} p_{r,\nu}^2 - \left[ \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{l_r p_{r,\mu} p_{r,\nu}}{S'(a_r)} \right]^2.$$

Die Relation ist vom vierten Grade und homogen; sie enthält die vierten Potenzen der  $p_{r,\mu}$  und  $p_{r,\nu}$ , die Producte der Quadrate derselben Functionen und die Producte zu vier der Functionen  $p_{r_1,\mu}, p_{r_1,\nu}, p_{r_2,\mu}, p_{r_2,\nu}$  etc. Für  $n = 2$  erhält man daraus die Göpel'sche Relation.

A.









worin  $x$  und  $y$  beliebige Constanten bezeichnen, hängen nur ab von den beiden Verhältnissen  $w' : w$  und  $w'' : w$ , wo  $w, w', w''$  von der Form

$$\int_g^h u^{-\frac{1}{2}} (u-1)^{-\frac{1}{2}} (u-x)^{-\frac{1}{2}} (u-y)^{-\frac{1}{2}} du$$

sind, und wo  $g, h$  zwei der Grössen  $0, 1, y, x, \infty$  bedeuten. Mit diesen Verhältnissen sind demnach auch die Coefficienten der zum Geschlecht 3 gehörigen Normalgleichung bestimmt. Da aber  $x$  und  $y$  mit diesen Coefficienten algebraisch verknüpft sind, so folgt, dass, wenn man  $w' : w = u$ ,  $w'' : w = v$  setzt und die  $w$  als Functionen von  $x$  und  $y$  betrachtet, die letzteren Variablen Wurzeln algebraischer Gleichungen sind, deren Coefficienten eindeutige Functionen von  $u$  und  $v$  sind, die durch eine Gruppe von linearen Transformationen der Form

$$\frac{m' + n'u + p'v}{m + nu + pv}, \quad \frac{m'' + n''u + p''v}{m + nu + pv}$$

ungeändert bleiben.

Hr.

E. PICARD. Sur les expressions des coordonnées d'une courbe algébrique par des fonctions fuchsiennes d'un paramètre. C. R. XCII. 1332-1335.

Nach einem Satze des Herrn Poincaré existirt zwischen zwei Fuchs'schen Functionen derselben Gruppe stets eine algebraische Beziehung. Für die umgekehrte Aufgabe, die algebraische Gleichung  $F(u, v) = 0$  durch Fuchs'sche Functionen desselben Parameters aufzulösen, giebt der Verfasser folgenden Weg an:

Es sei  $\int \frac{f(u, v)}{F'_v(u, v)} du$  ein Abel'sches Integral erster Gattung.

Sind nun  $u$  und  $v$  zwei durch die Gleichung  $F(u, v) = 0$  verknüpfte meromorphe Functionen einer Variablen  $z$  in einem gewissen Gebiete der  $z$ -Ebene, so ist

$$G(z) = \frac{f(u, v) \frac{du}{dz}}{F'_v(u, v)}$$

















Auszug aus einer Abhandlung, welche in den Trans. of Lond. gedruckt werden wird; der Inhalt derselben wird hier vollständig dargestellt. Abschnitt I behandelt Rosenhain's Theorie, wie sie hier genannt wird; Zweck desselben ist, auf allgemeinerer Grundlage und in leichter Weise die Resultate zu erhalten, welche sich in Rosenhain's bekannter Abhandlung finden. Geht man von der folgenden Definition der allgemeinen doppelten Thetafunction aus:

$$(1) \quad \Phi \left( \begin{smallmatrix} \lambda, \varrho \\ \mu, \nu \end{smallmatrix} \right) (x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{m\lambda + n\nu} p^{\frac{1}{4}(2m+\mu)^2} q^{\frac{1}{4}(2n+\nu)^2} r^{\frac{1}{2}(2m+\mu)(2n+\nu)} \varrho^{(2m+\mu)\frac{i\pi x}{2K} + (2n+\nu)\frac{i\pi y}{2L}}$$

und bezeichnet das Product von vier Functionen, in denen die charakteristischen Zahlen und die Variabeln die resp. Indices 1, 2, 3, 4 haben, mit

$$\Pi \Phi \left( \begin{smallmatrix} \lambda, \varrho \\ \mu, \nu \end{smallmatrix} \right) (x, y),$$

so ergibt sich mit Hülfe der Resultate, welche Herr Prof. H. J. S. Smith in seiner Abhandlung über die einfachen Thetafunctionen (Proc. L. M. S. I.) erhalten hat, ein Ausdruck für das Product

$$4 \Pi \Phi \left( \begin{smallmatrix} \lambda, \varrho \\ \mu, \nu \end{smallmatrix} \right) (x, y)$$

als Summe von sechzehn gleichen Producten

$$\Pi \Phi \left( \begin{smallmatrix} \mathcal{A}, P \\ M, N \end{smallmatrix} \right) (X, Y);$$

und die resultirende Gleichung umfasst,  $16^3$ , also 4096 Fälle.

Die 4-fache Periodicität wird gleich zu Anfang des Abschnittes untersucht, und es werden hernach die Perioden als bestimmte Integrale von der Form

$$K = \int_0^1 \frac{(A + Bx)dx}{\sqrt{X}},$$

wo  $X = x(1-x)(1-k_1^2x)(1-k_2^2x)(1-k_3^2x)$  ist, dargestellt. Auch wird gezeigt, dass diese  $K$  einer linearen Differentialgleichung genügen, die in Bezug auf die Grössen  $k_1, k_2, k_3$  von der 4<sup>ten</sup> Ordnung ist.







Die Entwicklung der ersteren

$$\mathfrak{P}(x) = \left( \frac{1}{x} - \frac{a}{x+1} + \frac{a^2}{2!(x+2)} - \dots \right) a^x$$

ist bekannt; die analoge Darstellung der zweiten wird hier gegeben. Es wird erstens

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}(x) = & P(1)R(x-1) + \frac{x-1}{1} P(2)R(x-2) \\ & + \frac{(x-1)(x-2)}{2!} P(3)R(x-3) + \dots, \end{aligned}$$

wo

$$R(x) = \frac{a^x}{e^a} + \frac{(a+1)^x}{e^{a+1}} + \frac{(a+2)^x}{e^{a+2}} + \dots,$$

und zweitens

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}(x) = & \mathfrak{P}(1)\mathfrak{R}(x-1) + \frac{x-1}{1} \mathfrak{P}(2)\mathfrak{R}(x-2) \\ & + \frac{(x-1)(x-2)}{2!} \mathfrak{P}(3)\mathfrak{R}(x-3) + \dots, \end{aligned}$$

wo

$$\mathfrak{R}(x) = \frac{a^x}{e^a} + \frac{(2a)^x}{e^{2a}} + \frac{(3a)^x}{e^{3a}} + \dots$$

und die Coefficienten  $\mathfrak{P}$  aus den Gleichungen

$$\mathfrak{P}(x+1) = x\mathfrak{P}(x) - \frac{e^{ax}}{a}, \quad \mathfrak{P}(1) = 1 - \frac{1}{e^a}$$

successiv sich ergeben. Zugleich wird auf die damit zusammenhängende Arbeit des Herrn Bourguet: Développement en série des intégrales Eulériennes, Paris, verwiesen. M.

P. APPELL. Sur une classe de fonctions analogues aux fonctions Eulériennes. Klein Ann. XIX. 84-102.

Einen Auszug aus dieser Abhandlung hat der Herr Verfasser in drei Artikeln der C. R. LXXXVI. 953, LXXXIX. 841 und 1031 mitgeteilt. Man sehe die Referate F. d. M. X. 1878. 206 und XI. 339 und 340. M.





















































4) Sie ist für alle Werte von  $z$  ausserhalb  $COC'$  dargestellt durch das Integral

$$F_s^n(z) = (2n+1)E_s^n(z) \cdot \int_z^\infty \frac{dz}{(E_s^n(z))^2 \sqrt{(z^2-b^2)(z^2-c^2)}},$$

wobei  $E_s^n(z)$  die Lamé'sche Function erster Art ist.

5) Sie wird für  $z = \infty$  Null von der Ordnung  $n+1$ .

6) Für alle Werte von  $z$  ausserhalb der obigen Curve 3) kann sie in eine nach steigenden Potenzen von  $\zeta$  geordnete Reihe entwickelt werden, welche mit  $\zeta^{n+1}$  beginnt.

7) Im Innern der beiden Schleifen, aus welchen die Curve 3) besteht, gilt je eine Entwicklung nach auf- und absteigenden Potenzen von  $\zeta$ .

An die Ermittlung dieser Eigenschaften schliesst sich die Untersuchung der Werte, welche  $F_s^n(z)$ , sowie die entsprechende Function erster Art  $K_s^n(z)$  für sehr grosse Werte des Index  $n$  annehmen. Hier ergibt sich:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} K_s^n(z) &= \frac{\zeta^{-n} \sqrt{(c^2-b^2)^n \cdot a_0}}{2^n \sqrt[4]{\zeta^4 + 2x\zeta^2 + 1}}, \\ F_s^n(z) &= \frac{2^{n+1} \zeta^{n+1}}{a_0 \sqrt{(c^2-b^2)^{n+1}} \sqrt[4]{\zeta^4 + 2x\zeta^2 + 1}}, \end{aligned} \right.$$

wobei  $a_0$  der Coefficient der höchsten Potenz der ganzen Function  $K_s^n(z)$  und

$$x = \frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2}$$

ist. Die genannten Ausdrücke gelten zunächst ausserhalb der Curve 3), lassen sich dann auch auf das Innere derselben übertragen mit Ausnahme der Linie  $COC'$ , die wieder besondere Betrachtungen erfordert.

Es folgt nun die Entwicklung des Ausdrucks  $(z_1 - z)^{-1}$  nach Lamé'schen Functionen. Bekannt ist zunächst (cf. Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, zweite Auflage, Teil II. p. 172) die Entwicklung der reciproken Entfernung zweier Punkte (in elliptischen Coordinaten ausgedrückt) in eine Reihe von Lamé'schen













Index durch Einführung einer neuen Integrationsvariablen und Aenderung der Bezeichnung direct die von Herrn C. Neumann aufgestellte Formel erhält:

$$(1) \quad F_0(\sqrt{r^2 + s^2 + 2rs \cos w}) = F_0(r)F_0(s) + 2 \sum_1^{\infty} F_n(r)F_n(s) \cos(nw).$$

Die hier mit  $F_n$  bezeichnete Function hängt mit der Bessel'schen Function in der gewöhnlichen Bezeichnung durch die Relation zusammen:

$$F_n(ir) = i^n J_n(r).$$

Aus (1) folgt für  $r = s$

$$(2) \quad [F_0(r)]^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_0(2r \cos \vartheta) d\vartheta.$$

Aus der Entwicklung von

$$e^{-(a-b \cos \vartheta)r}$$

nach Cosinus der Vielfachen von  $\vartheta$  und Integration ergibt sich ferner die von Lipschitz gefundene Formel

$$(3) \quad \int_0^{\infty} F_0(br) e^{-ar} dr = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Aus (2) und (3) endlich folgt die neue Formel

$$(4) \quad \int_0^{\infty} \{F_0(br) e^{-ar}\}^2 dr = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \varphi}}, \quad a > \sqrt{b^2},$$

eine Formel, die, wie der Verfasser erwähnt, zur Vereinfachung des Ausdrucks für das Potential eines homogenen Kreisrings benutzt werden kann. Wn.

A. CAYLEY. On the Schwarzian derivative, and the polyhedral functions. Cambr. Trans. XIII. 5-68.

Der Quotient  $s$  von irgend zwei Lösungen einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = 0$$

wird durch eine Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\frac{s'''}{s'} - \frac{3}{2} \left( \frac{s''}{s'} \right)^2 = -\frac{1}{2} \left( p^2 + 2 \frac{dp}{dx} - 4q \right)$$



# Achter Abschnitt.

## Reine, elementare und synthetische Geometrie.

### Capitel 1.

#### Principien der Geometrie.

G. VERONESE. Alcuni teoremi sulla geometria a  $n$  dimensioni. Rom, Acc. L. (3) V. 333-337.

Zusammenstellung der Hauptresultate aus des Verfassers grösserer Arbeit über denselben Gegenstand in Klein Ann. XIX. 161. Siehe Abschn. VIII. Cap. 5 B. Schg.

---

W. KRETKOWSKI. Auflösung einer Aufgabe aus der polydimensionalen Geometrie. Par. Denkschr. 1881. (Polnisch).

In einem Raume von  $n$  Dimensionen sind  $n+1$  Punkte  $A_\nu$  ( $1 \leq \nu \leq n+1$ ) durch ihre orthogonalen Coordinaten  $z_{\mu,\nu}$  ( $1 \leq \mu \leq n$ ) gegeben; man soll die Coordinaten  $z_\mu$  des von ihnen gleich entfernten Punktes  $A$  und diese Entfernung  $d$  bestimmen.

Bildet man die Determinante

$$W = \begin{vmatrix} 1, & z_{1,1}, & z_{2,1}, & \dots & z_{n,1} \\ 1, & z_{1,2}, & z_{2,2}, & \dots & z_{n,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & z_{1,n+1}, & z_{2,n+1}, & \dots & z_{n,n+1} \end{vmatrix}$$

und  $n+1$  Determinanten  $W_\mu$  ( $0 \leq \mu \leq n$ ), indem man in der Determinante  $W$  die  $(\mu+1)^{\text{te}}$  Verticalreihe durch

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu=1}^{\mu=n} z_{\mu,1}^2, \\ & \sum_{\mu=1}^{\mu=n} z_{\mu,2}^2, \\ & \vdots \\ & \sum_{\mu=1}^{\mu=n} z_{\mu,n+1}^2. \end{aligned}$$

ersetzt, dann wird

$$\begin{aligned} d &= W^{-1} \cdot (W W_0 + \frac{1}{4} \sum_{\mu=1}^{\mu=n} W_\mu^2), \\ z_\mu &= \frac{1}{2} W^{-1} \cdot W_\mu. \end{aligned} \quad (1 \leq \mu \leq n). \quad \text{Dn.}$$


---

R. HOPPE. Ueber den Winkel von  $n$  Dimensionen.

Hoppe Arch. LXVI. 448.

Ist eine allseitig begrenzte lineare  $(n-1)$ -Dehnung  $V$  der Ort eines variablen Punktes  $P$  und  $C$  ein fester Punkt im Abstände  $h$  von derselben, so ist der Ort von  $CP = \varrho$  eine  $n$ -dehnige Pyramide, in welcher der  $n$ -dimensionale Winkel an der Spitze durch die Formel gegeben ist

$$W = h \int \frac{dV}{\varrho^n}.$$

Da, wenn  $\varrho^2 = h^2 + r^2$  gesetzt wird, die Variable  $r$  innerhalb der  $(n-1)$ -dimensionalen Figur  $V$  bleibt, so ist für  $n = 4$  die Integration nur eine Cubatur. Schg.

---

R. HOPPE. Berechnung einiger vierdehniger Winkel.

Hoppe Arch. LXVII. 269-290.

Die in der vorher besprochenen Arbeit gegebene Formel wird für die beiden Fälle specialisirt, dass der Schnitt eines vierdehnigen Winkels und eines Raumes ein Rotationskörper oder ein Polyeder sei. Ist im ersten Fall der Rotationskörper von einer Fläche zweiter Ordnung begrenzt, so ist die Cubatur leicht

























**A. BARBOCKA.** Geometrische Formenlehre. Prag. (Böhmisch).  
Std.

---

**F. HOZA.** Grundzüge der ebenen Geometrie.  
Prag. (Böhmisch).

Ergänzt das früher schon herausgegebene Lehrbuch der Geometrie im Raume zu einem Schulbuch für die Unterklassen der böhmischen Mittelschulen. Reichhaltigkeit des Inhaltes erscheint hier vom Standpunkte der Schule kaum als Vorzug.  
Std.

---

**V. JAROLÍMEK.** Geometrie für die IV. Realschulklasse.  
Prag. (Böhmisch).

Ist als Lehrbuch der neuesten Verordnung des K. K. Unterrichtsministeriums angepasst und zeichnet sich sowohl der Form wie dem Inhalte nach vor gewöhnlichen Lehrbüchern durch concise und gediegene Ausarbeitung, namentlich aber auch durch schöne Holzschnittfiguren aus.  
Std.

---

**J. MENGER.** Grundlehren der Geometrie. Wien. A. Hölder.

Dieser Leitfaden ist für den Unterricht in der Geometrie und im geometrischen Zeichnen an Realschulen bestimmt. Das Buch enthält die Grundlehren der ebenen und räumlichen Geometrie in dem Umfange und der Anordnung, wie der neue in Oesterreich 1880 gegebene Lehrplan vorschreibt, mit vielen Uebungsaufgaben und Beispielen; es soll ein Leitfaden und Hilfsbuch für Lehrer und Schüler sein. Zuerst werden practische Anweisungen zum geometrischen Zeichnen gegeben; dann folgt die ebene Geometrie, von der Geraden und den Winkeln an bis zum Umfang und Inhalt des Kreises. Hierauf kommt die räumliche Geometrie bis zur Messung von Polyedern, Cylinder, Kegel und Kugel. Endlich werden die Kegelschnittlinien behandelt, wobei auch gezeigt wird, wie die in der analytischen Geometrie ge-











struierbar sind, wie:

$$\frac{a}{b}, \frac{ab}{cd}, \frac{a^2}{b^2}, \sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{2}, \text{ u. s. w.};$$

ferner Ausdrücke erster Dimension:

$$\frac{a}{n}, a \pm b, \frac{ab}{c}, \sqrt{ab}, \sqrt{a^2 \pm b^2},$$

wo jede einzelne Gruppe besonders abgehandelt und die bezügliche Construction gezeigt wird; hierauf Ausdrücke zweiter Dimension:

$$ab, \frac{ab}{2}, \frac{abc}{d}, a^2 \pm b^2 \text{ etc.}$$

Am Schluss fügt der Herr Verfasser zur Uebung im geometrischen Lösen und in der Construction der Ausdrücke einige dem rechtwinkligen Dreiecke entlehene Formeln, und noch einige Inhaltsformeln hinzu.

Mz.

J. SCHEFFER. On the ratio of the area of a given triangle to that of an inscribed triangle. Anal. VIII. 173-174.

Wenn die Ecken des eingeschriebenen Dreiecks durch Transversalen bestimmt sind, welche sich in einem Punkte schneiden, so ist das Verhältniß  $2\alpha\beta\gamma$ , wo  $\alpha, \beta, \gamma$  die Bruchtheile der geschnittenen Seiten sind.

ln. (O.).

GAUSS. Berechnung der Höhe und des Höhenfusspunktes aus den drei Seiten eines ebenen Dreiecks.

Jordan, Z. f. V. IX. 339. 1880.

BEHREN. Berechnung der Höhe und des Höhenfusspunktes aus den drei Seiten eines ebenen Dreiecks.

Jordan, Z. f. V. IX. 453. 1880.

B.

J. NEUBERG. Sur le centre des médianes antiparallèles.

Math. I. 153-154, 173-176, 185-190.

Der Punkt  $K$  der Ebene eines Dreiecks  $ABC$ , dessen Entfer-









zweite, kürzere von ihnen ist folgende: Je zwei sich schneidende Diagonalen kann man als Diagonalen eines Vierecks ansehen, dessen Seiten Polygonseiten oder andere Diagonalen sind. Da nun jedes Viereck einen Diagonalschnittpunkt hat, so ist die Anzahl  $x$  der Diagonalschnittpunkte gleich der Anzahl der Vierecke, die sich durch Combination von je vier Punkten aus  $n$  Punkten bilden lassen, d. h.

$$x = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

Hierzu wird noch die Frage aufgeworfen: Wie viel an einander stossende Figuren werden durch die Diagonalen des Polygons innerhalb desselben gebildet? Mz.

P. SCHÖNEMANN. Ueber die Verwandtschaft des Rechtecks mit einem Quadrat. Schlömilch Z. XXVI. 208. Mz.

SCHNELL. Übungsaufgabe für Schüler. Hoppe Arch. LXVII. 333-335.

Es wird die Aufgabe behandelt: „In einem gegebenen Quadrate durch Zeichnung von vier Geraden unmittelbar ein Quadrat herzustellen, dessen Inhalt gleich einem Fünftel, und dessen Mittelpunkt der des gegebenen Quadrates ist.“

Die Lösung ist folgende: Man halbire vom gegebenen Quadrat  $ABCD$  die Seite  $DA$  in  $E$ ,  $AB$  in  $F$ ,  $BC$  in  $G$ ,  $CD$  in  $H$  und verbinde  $A$  mit  $G$ ,  $B$  mit  $H$ ,  $C$  mit  $E$ ,  $D$  mit  $F$ . Dann ist das durch diese vier Geraden begrenzte Viereck das verlangte Quadrat. Die Richtigkeit dieser Lösung wird nachgewiesen.

Mz.

E. JACKWITZ. Dreieckssätze. Hoppe Arch. LXVII. 335-336.

Es wird bewiesen: „Wenn  $H$  der Höhendurchschnitt und  $O$  der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises eines Dreiecks sind, so ist:





































sämtlichen Strahlen des Büschels zugeordnet ist, liegt auf einer Fläche vierter Ordnung. Setzt man diese als construiert voraus, so liefern ihre Durchschnittspunkte mit der Geraden  $C$  ersichtlich die dritten Ecken von Dreiecken der gesuchten Art, deren es hiernach vier giebt.

Die Fläche vierter Ordnung wird eingehend untersucht, insbesondere wird ihr Doppelkegelschnitt als ein durch den Punkt  $\alpha$  gehender Kreis nachgewiesen. Rg.

---

L. LEBRUN. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XX. 12-13.

Geometrischer elementarer Beweis dafür, dass die Centralprojection einer Schraubenlinie auf eine zur Axe senkrechte Ebene eine Archimedische Spirale ist, wenn das Projectionscentrum auf der Axe liegt. O.

---

## Capitel 5.

### Neuere synthetische Geometrie.

#### A. Ebene Gebilde.

W. FUHRMANN. Einleitung in die neuere Geometrie für die oberen Klassen. Leipzig. Teubner.

W. St.

---

W. ERLER. Die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. Zweite Auflage. Leipzig. Teubner.

W. St.

---

A. DRONKE. Die Kegelschnitte in synthetischer Behandlung für die Prima höherer Lehranstalten. Leipzig. Teubner.

W. St.

---























































gleich  $\frac{1}{13}$  des Halbmessers der Uhrscheibe ist, und welcher auf einem Kreise rollt, dessen Radius gleich  $\frac{11}{13}$  des Halbmessers der Uhrscheibe ist, und welcher mit letzterer concentrisch liegt. Das Problem ist schon im Jahre 1872 (s. F. d. M. IV. 354) von Herrn Kiepert in allgemeinerer Form erledigt und darüber in dem Jahrbuch berichtet worden. W. St.

---

A. SUCHARDA. Eine Tangentenconstruction zur Astroide. Hoppe Arch. LXVI. 321-325.

Dieser Aufsatz giebt eine Annäherungsconstruction der durch einen beliebigen Punkt gehenden Tangenten der Astroide. W. St.

---

WEILL. Note sur la cardioïde et le limaçon de Pascal. Nouv. Ann. (2) XX. 160-171.

Aus einer Reihe von zum Teil bekannten Sätzen über die Cardioide und die Pascal'sche Schnecke werden hier Theoreme über Curven abgeleitet, welche mit den ersten collinear verwandt sind. W. St.

---

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über Curven von höherem als dem zweiten Grade in synthetischer Behandlung von F. D. THOMSON, G. TORELLI, E. W. SYMONS, D. EDWARDES, NASH, CH. LADD, MATZ, E. PECQUERY, E. CHRÉTIEN finden sich Ed. Times XXXIV. 118-119, 119, 120, XXXV. 39-40, 40-41, 54, 54-55; Nouv. Ann. (2) XX. 184-185.

O.

















stehende Netz nichtlinearer räumlicher Raumformen erzeugt werden. Viele Untersuchungen beziehen sich auf die eindeutige Abbildung der Curve zweiter Ordnung auf die Fläche ihrer Tangentialen, auf gewisse Zusammenhänge der Curve, auf den Zusammenhang der Curve mit einem Flächenelement zweiter Ordnung, auf die Eigenschaft der Curve, Locuscurve einer Flächenwindung zweiten Grades zu sein, und auf das Polarsystem einer Fläche erster Ordnung. Bemerkenswert ist auch, dass die von Herr Seur durchgeführte Raumcurve zweiter Ordnung als Erzeugnis von drei nichtlinearer räumlicher Systemen auch von Herrn Scharf in seinen endlichen Raumtransformationen (Uebungsbuch III 141-234 u. F. d. M. II 1871, p. 117) erkannt und kurz behandelt ist.

Beziehungen zu Herr Seur auf ein noch ganz unbekanntes Untersuchungsgebiet, indem er das Erzeugnis von vier collinearen räumlichen Systemen studiert. Es ist dies eine Fläche vierten Grades, welche zwar nicht wie die allgemeine von 34, sondern nur von 23 Constanten abhängt, jedoch alle bisher besonders betrachteten Flächen vierten Grades als specielle Fälle umfasst. Insbesondere entwickelt Herr Seur hier nur gewisse Haupteigenschaften, die sich für diese Fläche vierten Grades aus der erwähnten Erzeugnis ergeben, indem er sich ein Eingehen auf specialisire Fragen für eine spätere Arbeit vorbehält.

Scht.

K. KLEIN. Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde. Marburg. V. G. Ewert.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 5. A. p. 464.

LAGUERRE. Sur la transformation par directions reciproques. C. R. XCII 71-74.

Der Verfasser giebt hier eine Erweiterung einer schon früher (la géométrie de direction) von ihm aufgestellten Berührungsformation in der Ebene für den Raum. Eine Fläche, welche











































Der zweite Teil befasst sich mit der Construction der Raum-epicycloiden, wenn  $L$  wirklich auf  $K$  rollt, die Ebene von  $L$  aber gleichzeitig sich um die gemeinsame Tangente der Kreise dreht. Besonders wird der Fall in's Auge gefasst, wenn  $K$  eine gerade Linie ist. W. St.

---

Weitere Aufgaben aus der synthetischen Geometrie des Raumes von TOWNSEND, A. LEINEKUGEL finden sich Ed. Times XXXV. 79-80; Nouv. Ann. (2) XX. 178. O.

---

### C. Abzählende Geometrie.

G. VERONESE. Die Anzahl der unabhängigen Gleichungen, die zwischen den allgemeinen Charakteren einer Curve im Raum von  $n$  Dimensionen stattfinden. Klein Ann. XVIII. 448.

Eine Curve in der Ebene hat sechs Charaktere, die durch drei Gleichungen verbunden sind, eine Curve im drei-dimensionalen Raume hat neun Charaktere mit sechs Gleichungen, eine Curve in einem  $n$ -dimensionalen Raume hat  $3n$  Charaktere, welche durch  $3(n-1)$  von einander unabhängige Gleichungen verbunden sind. (Siehe auch p. 488.). Scht.

---

R. STURM. On some new theorems on curves of double curvature. Brit. Ass. Rep. 1881.

Der Verfasser betrachtet eine Raumcurve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung ohne singuläre Punkte, an welche  $h$  Sehnen von einem gegebenen Punkte aus gehen. Der grösste Wert von  $h$  ist bekanntlich  $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ . Der Zweck der Arbeit ist, zu beweisen, dass der kleinste Wert von  $h$  die grösste in  $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$  enthaltene ganze Zahl ist. Csy. (O.).

---











$$b = \frac{1}{2} [n^2 - Mn - (N-4)e],$$

wo der Kürze wegen  $M = \Sigma(m_i)$ ,  $N = \Sigma(n_i)$  und

$$e = m_1 m_4 n_3 n_4 + m_1 m_3 n_2 n_4 + m_1 m_4 n_2 n_3 + m_2 m_3 n_1 n_4 \\ + m_2 m_4 n_1 n_3 + m_3 m_4 n_1 n_2$$

gesetzt ist. Für die Ordnung  $\theta$  der einfachen Curve auf  $\Phi$ , welche der Doppelcurve auf  $F$  entspricht, ergibt sich

$$\theta = (n-M)e - (N-4)v.$$

Die Zahl  $j$  der pinch-points auf  $F$  wird

$$j = v(N_2 - 4N + 10) + nM_2 + e(MN - 4M - P),$$

wo

$$M_2 = \sum_{i < k} (m_i m_k), \quad N_2 = \sum_{i < k} (n_i n_k) \quad \text{und} \quad P = \sum (m_i n_i)$$

gesetzt ist. Die Zahl  $t$  der dreifachen Punkte auf  $F$  ergibt sich dann aus

$$t = \frac{1}{3} [bn - 2bM - (N-4)\theta + j].$$

Scht.

H. G. ZEUTHEN. Théorie des figures projectives sur une surface du second ordre. Klein Ann. XVIII. 33-69.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 5. B. p. 501.

E. B. HOLST. Saetninger om de Cirkler i Rummet, som skjaere et fact Keglesnit to Gange. Christiania Forh 1881.

Sätze über Flächen, die von Kreisen erzeugt werden, welche einen festen Kegelschnitt zweimal schneiden. L.

O. RUPP. Ueber die Abhängigkeit der Charaktere einer durch Leitcurven bestimmten Regelfläche von den Charakteren dieser Leitcurven. Klein Ann. XVIII. 366-379.

Die vorliegende Abhandlung bildet insofern eine wesentliche Ergänzung gewisser von Salmon, Cayley und auch von Picquet, Zeuthen und dem Referenten unternommenen Untersuchungen,







mit einer Fläche  $P$ , bestimmt durch  $np - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + h$  unter ihnen, falls  $p \geq n-2$ .<sup>4</sup> Ferner enthält dieser Abschnitt eine Reihe von Bestimmungen für die Anzahl von Schnittpunkten, welche durch die andern bestimmt sind, im Falle, dass  $p < n-2$ .

Der vierte Abschnitt handelt von den Doppelstrahlen und schliesst sich einem im zweiten Teile bewiesenen Satze an. Können nämlich aus irgend einem Punkte  $h$  Doppelstrahlen zu  $c_n$  gelegt werden, so wird ein Kegel der  $m^{\text{ten}}$  Ordnung wenigstens  $\frac{(n-m-2)(n-m-3)}{2}$  derselben enthalten, weil er durch die übrigen geht, wenn nur

$$n-2 > m \geq \frac{n-2}{2}$$

und zugleich

$$h \leq \frac{m(m+3)}{2} + \frac{(n-m-2)(n-m-3)}{2}.$$

Es wird nun zuerst gezeigt, dass wenn  $c_n$  nicht auf einer Fläche der zweiten Ordnung liegt, ein Kegel der  $m^{\text{ten}}$  Ordnung immer mehr Doppelstrahlen als die hier angegebene Anzahl enthalten muss, wenn er durch die übrigen geht, falls  $h < m-4$ . Demnächst wird genauer untersucht, wie viele der Doppelstrahlen ein Kegel der  $n^{\text{ten}}$  Ordnung wenigstens enthalten muss, damit er durch die übrigen geht, sofern  $c_n$  auf einer Fläche der  $q^{\text{ten}}$  Ordnung liegt. Im letzten Abschnitte wird endlich untersucht, wie vielen Bedingungen eine Raumcurve noch unterworfen werden darf, wenn nur die Ordnung und die Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte gegeben sind. Es wird gefunden, dass die gesuchte Anzahl  $4n$  ist, wenn  $h > \frac{(n-2)(n-3)}{2}$ , ein schon früher bekanntes Resultat.

Dies sind kurz die Hauptresultate der vorliegenden bedeutenden Arbeit; auf eine Wiedergabe des Gedankenganges der Beweise, welche übrigens mit grosser Sorgfalt durchgeführt sind, müssen wir wegen der Schwierigkeit dieser Art von Untersuchungen verzichten.

Gm.

# Neunter Abschnitt.

## Analytische Geometrie.

### Capitel 1.

### C o o r d i n a t e n.

H. M. JEFFERY. On dual inversion of cartesian and boothian coordinates. Quart. J. XVII. 311-319.

Die Diagonale, welche die Fusspunkte der Cartesischen Coordinatenstrecken eines variablen Punktes  $(x, y)$  verbindet, umhüllt eine Curve, deren Grad im Allgemeinen doppelt so hoch ist als derjenige der von dem Punkte beschriebenen Curve, und deren Gleichung durch die Substitutionen  $\frac{1}{\xi}$  und  $\frac{1}{\eta}$  aus der Gleichung der letzteren hervorgeht. Die Arbeit enthält specielle Untersuchungen über die Beschaffenheit dieser Klassencurve, wenn die ursprüngliche Curve ein Kegelschnitt in verschiedenen Lagen ist, sowie über den reciproken Fall, dass die in Linien-coordinaten  $(\xi, \eta)$  gegebene Gleichung durch die Substitutionen  $\frac{1}{x}$  und  $\frac{1}{y}$  für  $\xi$  und  $\eta$  transformirt wird. Besonders eingehend werden die singulären Punkte behandelt. Schg.

---

R. W. GENESE. On a system of coordinates. Lond. M. S. Proc. XII. 157-168.





der Heranziehung von Grassmann's und Scheffler's höheren Einheiten, und mit Widerlegung der Einwürfe (gegen Nutzen, Berechtigung und Richtigkeit der Quaternionentheorie), welche teils in einer Recension von Hoppe über des Verfassers Programmschrift „Der Winkel als Grundlage mathematischer Untersuchungen“ (1878), teils von Scheffler in seinem Buche über polydimensionale Grössen erhoben worden sind. Reelle Vorwürfe können sich nach Ansicht des Referenten nur gegen die unpraktischen Bezeichnungen des Quaternionencalcüls richten und gegen das einseitige Verfahren der Autoren, diesem Calcül auch solche Probleme zur Erledigung zu überweisen, die naturgemäss anderen Zweigen der Ausdehnungslehre zufallen. (Vgl. F. d. M. IX. 1877. 512.)

Schg.

---

W. R. HAMILTON. Elemente der Quaternionen. Deutsch von P. Glan. Bd. I. T. 1. u. 2. Leipzig. J. A. Barth.

Das Referat erfolgt nach Vollendung des Werkes.

Schg.

---

C. A. LAISANT. Introduction à la méthode des quaternions. Paris, Gauthier-Villars.

Ein ausführliches Referat darüber von H. Brocard findet sich Nouv. Ann. (3) I. 332-335, über welches im nächsten Jahre berichtet werden wird.

Q.

---

## Capitel 2.

### Analytische Geometrie der Ebene.

#### A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

H. W. WESTIN. Elementarlärobok i analytiska geometrien. Stockholm 8°.

---

M. L.

E. MAHLER. Zur allgemeinen Theorie der ebenen Curven.  
Hoppe Arch. LXVI. 365-372.

Die gewöhnlichen Coordinaten  $x, y$  werden zu Functionen zweier unabhängiger Variabeln  $u, v$  gemacht und die ebene Geometrie auf dieselbe allgemeinere Grundlage gestellt, welche Gauss für die Geometrie auf der beliebigen Fläche anwendet. Namentlich wird die Tangente und die Krümmung einer beliebigen ebenen Curve  $v = f(u)$  in dieser Form bestimmt. Ueber die dazu verwandte dem Verfasser eigentümliche Einführung der Grössen  $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}$  ist jedoch zu bemerken, dass ihre Erklärung Bezug auf eine Curve nimmt, aber nicht gesagt wird, auf welche?, und dass diese Erklärung ohne Beantwortung dieser Frage unverständlich ist, wahrscheinlich sogar einen principiellen Irrtum vermuten lässt.

H.

J. S. VANĚČEK. Krumme Linien in der Ebene und im Raume. Prag. (Böhmisch).

Eine selbständige Schrift über dieses reichhaltige Thema, in der die Hauptpunkte nach französischen Quellen erörtert werden.

Std.

M. D'OCAGNE. Sur la construction de la normale dans un certain mode de génération des courbes planes.  
Nouv. Ann. (2) XX. 197-201.

Schneiden sich die in den Punkten  $p$  und  $p_1$  zweier fester Curven errichteten Normalen in einem Punkte  $m$ , setzt man ferner  $mp = \varrho$ ,  $mp_1 = \varrho_1$ , so ist die fragliche Curvengattung der Punkte  $m$  definirt durch die Gleichung

$$\mathfrak{F}(\varrho, \varrho_1) = 0.$$

Die Normale in  $m$  ergibt sich als Diagonale eines gewissen Parallelogrammes. Als Beispiel wird die Lemniscate behandelt.

Rg.







drei consecutiven Punkten der Curve. Die Rechnung stützt sich darauf, dass der Radius des Umkreises gleich dem Product der Seiten dividirt durch das vierfache Dreieck ist. H.

P. VOGEL. Note über Discontinuitäten bei Curven.

Schlömilch Z. XXVI. 391-392.

Zunächst bespricht der Herr Verfasser einige Mittheilungen des Herrn J. Plateau an die belgische Akademie, in welcher Letzterer auf gewisse Discontinuitäten bei Functionen einer reellen Veränderlichen aufmerksam macht, die er durch geschlossene Ausdrücke, in welche nur algebraische und trigonometrische Functionen eingehen, darstellen zu können glaubt. Nachdem der Herr Verfasser einen hierbei vorgefundenen Fehler erwähnt hat, giebt er selbst einige Beispiele, um die von Herrn Plateau gemeinten Discontinuitäten im Curvenlauf zu erzeugen, indem er von einer Function ausgeht, die im Punkte  $x = a$  eine wesentliche Unstetigkeit besitzt.

Im ersten Beispiel ersetzt der Herr Verfasser die Curve

$$y = x\sqrt{a-x}$$

durch folgende:

$$y = \frac{x^n}{\log x} + x\sqrt{a-x}.$$

Im zweiten Beispiel wird die Curve

$$x = y^2(1 + \sqrt{1-y})$$

ersetzt durch

$$x = (y - x^{\sqrt{2}})^2 (1 + \sqrt{1-y + x^{\sqrt{2}}})$$

und das Verhalten derselben besprochen. Am Schluss sagt der Verfasser, dass man durch trigonometrische Functionen oder durch Combinationen einer endlichen Zahl derselben nicht im Stande ist, solche Unstetigkeiten zu erzeugen. Mz.

L. DE LA RIVE. Exercices de géométrie analytique.

Bibl. un. (3) V. 34-42.







































































Dies ergibt für  $m = 1$  die Kettenlinie, für  $m = -1$  den Kreis, für  $m = 2$  eine Parabel, deren Directrix die X-Axe ist.

O.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über ebene Curven von höherem als dem zweiten Grade von TOWNSEND, TANNER, J. J. WALKER, W. J. C. SHARP, G. EASTWOOD, R. TUCKER, W. E. WRIGHT, A. L. SELBY, E. B. ELLIOTT, MATZ, F. D. THOMSON, W. GALLATLY, NASH, J. HAMMOND, SCHEFFER, W. R. W. ROBERTS, EVANS, WOLSTENHOLME, CH. LADD, J. A. KEALY, J. O'REGAN, R. KNOWLES, N. GOFFART, MORET-BLANC finden sich Ed. Times XXXIV. 23, 29-30, 79, 85-86, 91, 104, 115, XXXV. 37-39, 43, 44, 46-47, 51-52, 52-53, 55-57, 69, 71, 92; Nouv. Ann. (2) XX. 42-43, 518-520.

O.

### Capitel 3.

## Analytische Geometrie des Raumes.

### A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

F. JOACHIMSTHAL. Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. Zweite Auflage, bearbeitet von L. NATANI. Leipzig. B. G. Teubner.

Das Werk ist in erster Auflage nach Joachimsthal's Vorlesungen in seinem Auftrage und von ihm gebilligt, von Lierse-  
mann bearbeitet, aber erst viel später herausgegeben. Der Titel lässt erkennen, auf wie geringe Bekanntschaft mit der allgemeinen Curven- und Flächentheorie der Autor bei seinem Publikum rechnen durfte, da er die dazu erforderlichen Organe besonders nennen muss. Die Sorgfalt und Ausführlichkeit in den Anfängen,







der Fläche der der Projektion. Hieraus kann weiter gefolgert werden, dass nur auf konvexen Flächen eine solche Projektion der geodätischen Geraden von einem Punkt aus existieren kann. Dass nur auf Flächen mit konstanter negativer Krümmung die hyperbolischen Linien einer Hyperbolicen Krümmung von einem Punkt aus die Tangente haben, so auf solchen Flächen auch nicht. Dieser Satz ist in der Form: *Keine Fläche, welche von einem Punkte aus Tangenten zu einer Kurve hat, ist eine Fläche mit konstanter negativer Krümmung* zu formulieren. Diese Kurve ist die Projektion der Tangenten. Die hier hergeleiteten Sätze müssen.

Die Untersuchung welcher von einem Punkte aus die Tangenten zu einer Kurve auf einer Fläche existieren, ist die Hauptaufgabe der Geometrie in der Projektion. Es ist zu zeigen, dass die Tangenten der Kurven, welche eine Fläche schneiden, eine Kurve bilden, die eine in ihrer Art geordnete, die einzigen Kurven, welche Tangenten schneiden, sind. Dieser ist die zweite Aufgabe der Geometrie. Es wird nachgewiesen, dass es keine Kurve gibt, welche Tangenten schneiden. Die Aufstellung äquidistanter Curven, welche auf Flächen konstanter Krümmung, noch spezieller auf einer Kugel, und auf Rotationsflächen führt zu einer Reihe von interessanten Resultaten. Namentlich möge hervorgehoben werden, dass gewisse äquidistante Curven auf einer Rotationsfläche eine einfache Beziehung zu den geodätischen Linien einer gewissen anderen Rotationsfläche haben. Sind nämlich

$$x = q \cos \varphi, \quad y = q \sin \varphi, \quad z = f(q)$$

die Gleichungen einer Rotationsfläche, so sind durch die Substi-

tution  $q = c(u - v)$  und  $u + v = \int dq \frac{\sqrt{1+f'(q)^2}}{\sqrt{1-q^2c^2}}$  solche Para-

meter  $u$  und  $v$  eingeführt, dass die Parametercurven äquidistant sind. Setzt man aber

$$q = \frac{1}{q'}, \quad u = -\frac{u'}{c}, \quad v = -\frac{v'}{c},$$









Im zweiten Abschnitt entnimmt der Verfasser dieser letzten Formel durch normale Anwendung der Regeln über Maxima und Minima die Bestimmung der Hauptkrümmungsradien und der zugehörigen Haupttragten. Diese und die vorliegende sind allein von Hesse behandelt (a. a. O.). Jedoch gelangt der Verfasser, da er im Moment der Abfassung seiner Abhandlung die Hesse'sche Arbeit nicht kannte, durch die Verschiedenheit der angewandten Methode zu einem einfacheren System von Gleichungen für die Bestimmung der Hauptschnitte, als Hesse, welches aber, wie er im Folgenden zeigt, sonst äquivalent ist. Sind  $a, b, c$  die Richtungscosinus der Tangente an einen Hauptschnitt,  $R$  der entsprechende Krümmungsradius,  $\lambda, \mu, \nu$  die Richtungscosinus der Normalen an die gegebene Fläche  $\varphi(x, y, z) = 0$ , so dass

$$\lambda = \frac{1}{J_1 \varphi} \frac{d\varphi}{dx}, \quad \mu = \frac{1}{J_1 \varphi} \frac{d\varphi}{dy}, \quad \nu = \frac{1}{J_1 \varphi} \frac{d\varphi}{dz},$$

so genügen die drei gesuchten Cosinus  $a, b, c$  den folgenden fünf Gleichungen:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad a \frac{d\varphi}{dx} + b \frac{d\varphi}{dy} + c \frac{d\varphi}{dz} = 0,$$

$$\begin{cases} a \frac{d\lambda}{dx} + b \frac{d\lambda}{dy} + c \frac{d\lambda}{dz} = \frac{a}{R}, \\ a \frac{d\mu}{dx} + b \frac{d\mu}{dy} + c \frac{d\mu}{dz} = \frac{b}{R}, \\ a \frac{d\nu}{dx} + b \frac{d\nu}{dy} + c \frac{d\nu}{dz} = \frac{c}{R}, \end{cases}$$

von denen die drei letzten sich auf eine reduciren, wenn man die beiden ersten berücksichtigt. Aus diesen Gleichungen wird dann die Bedingung dafür abgeleitet, dass die beiden Hauptschnitte senkrecht seien, dann die Formel

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R'} \cos^2 \theta + \frac{1}{R''} \sin^2 \theta,$$

und endlich der Ausdruck für die Coefficienten  $H$  und  $K$  der Gleichung zweiten Grades

$$\frac{1}{R^2} - H \frac{1}{R} + K = 0,$$











































































































Die Bedingung dafür, dass zwei Kegel zweiter Ordnung sich in Kegelschnitten durchschneiden, kann darauf zurückgeführt werden, dass die Verbindungslinie ihrer Scheitel eine beliebige Ebene in einem Punkte schneidet, von welchem aus sich zwei gemeinsame Tangenten an die Kegel legen lassen. Dieselben können jedoch reell oder imaginär sein. Durch die bekannten synthetischen Methoden können aber beide Fälle nach denselben geometrischen Gesichtspunkten behandelt werden. Dies ist in der vorliegenden Arbeit geschehen. A.

C). BÖKLE. Ueber confocale Flächen. Schlämilch Z. XXVI. 204-207.

Die Resultate der Arbeit lassen sich in folgenden beiden Sätzen zusammenfassen:

1. „Die Focallinien des Systems von Kegeln, welche aus einem beliebigen Punkte  $S$  den Flächen eines confocalen Systems umschrieben werden können, sind die Erzeugenden der drei durch  $S$  gehenden confocalen Flächen; die reellen Focallinien gehören dem einmantligen Hyperboloid an, die imaginären dem Ellipsoid und dem zweimantligen Hyperboloid.“ (Soweit der Satz die reellen Focallinien betrifft, ist er bereits von Chasles und Jacobi ausgesprochen, wie der Herr Verfasser bemerkt).

2. „Wenn ein System confocaler Flächen gegeben ist, und man legt durch einen Punkt  $S$  einen Tangentenkegel, welcher eine dieser Flächen, z. B. ein Ellipsoid in einer Ellipse  $E$  berührt, so ist durch  $E$  als Focalellipse ein zweites System confocaler Flächen bestimmt. Die drei durch  $S$  gehenden Confocalen dieses Systems haben mit je einer Confocalen des ersten in  $S$  eine Berührung zweiter Ordnung insofern, als nicht bloß die Tangenten der Krümmungslinien, sondern auch die reellen oder imaginären Erzeugenden von je zwei sich berührenden Flächen zusammenfallen.“

Referent möchte bemerken, dass der Ausdruck Berührung zweiter Ordnung für diese Beziehung bedenklich ist, da die Haupt-

























Spitzen der Kegel, die dem Ellipsoid eingeschrieben sind und gleichzeitig zu einem Hauptachsenraum zwei unter einem gegebenen Winkel zu einander geneigte Linien haben. Diese Flächen schneiden das Ellipsoid in ihren Krümmungscurven. Es ergibt sich daraus eine neue Erzeugungsart der Krümmungscurven einer Fläche zweiten Grades. Ch. (O.)

---

S. ROBERTS. On some forms of the equation of the wave surface. *Quart. J.* XVII 319-327.

Herr Mannheim hat in den C. R. XC. 971-974. (siehe F. d. M. XII. 1889. 656) die Wellenfläche in gewissem Sinne als Grenzfläche eines Raumes betrachtet. Es ergab sich ihm daselbst unter Anderem aus kinematischen Betrachtungen, dass die Fusspunkte der Perpendikel vom Mittelpunkt eines Ellipsoids auf die Sehnen, welche einen rechten Winkel für das Centrum des Ellipsoides überspannen, einen gewissen Teil des Raumes einnehmen, welcher durch eine Wellenfläche begrenzt ist. Die Ergebnisse dieser Mannheim'schen Arbeit finden hier in analytischen Formen ihren Ausdruck. Schn.

A. MANNHEIM. Construction plane des éléments de courbure de la surface de l'onde. *Chelini, Coll. Math.* 91-104.

Der Gegenstand, den Herr Mannheim in dem vorliegenden Aufsatz behandelt, ist seinem wesentlichen Gedankeninhalt nach bereits in den C. R. LXXXVIII. 1128-1131, 1179-1183, 1248-1252 von ihm veröffentlicht worden, und es findet sich demgemäss im Bd. XI. 625-627 dieser Zeitschrift darüber der Bericht. Hier werden die Grundgedanken noch einmal eingehender entwickelt und in ihren Einzelheiten für die Zwecke der ebenen Construction der Krümmungselemente der Wellenfläche verfolgt.

Schn.





















































p. 623-625) aufgeworfene und gelöste, die cyklischen Gruppen einer ebenen quadratischen (nicht involutorischen) eindeutigen Transformation aufzustellen. Die vom Herrn Verfasser aufgestellte Fundamentalformel ist mit der Kantor'schen identisch.

My.

F. ASCHIERI. Di una corrispondenza Cremoniana quadratica fra gli elementi di due forme fondamentali di 4<sup>a</sup> specie e spazi rigati. Lomb. Rend. (2) XIV. 123-131.

F. ASCHIERI. Sopra una corrispondenza quadratica Cremoniana fra gli elementi di due spazi rigati. Lomb. Rend. (2) XIV. 219-227.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 5. B. p. 494.

J. GUCCIA. Sur une classe de surfaces représentables, point par point, sur un plan. Franc. Ass. 1880.

Dies sind die Flächen  $n^{\text{ter}}$  Ordnung mit einer  $\mu$ - und  $\nu$ -fachen Geraden ( $\mu + \nu = n - 1$ ), die windschief sind. Die Abbildung wird auf folgende Weise vermittelt: „Man nehme in der Ebene ein homoloidisches Netz  $n^{\text{ter}}$  Ordnung an. Dann geht durch einen Punkt  $b$  noch ein Büschel von Curven  $f_b$  des Netzes, entsprechend durch einen zweiten Punkt  $c$  ein Büschel  $f_c$ . Zwei dieser Curven  $f_b, f_c$  werden beliebig herausgegriffen. Das Büschel  $(f_b, f_c)$  wird einem Büschel von Curven  $m^{\text{ter}}$  Ordnung  $(\Phi, \Psi)$  projectivisch zugeordnet (so dass  $f_b$  und  $\Phi$ ,  $f_c$  und  $\Psi$  sich entsprechen, während die dritte Zuordnung noch willkürlich ist). Das Erzeugnis ( $s$ ) dieser Zuordnung ist das Bild einer ebenen Schnittcurve der Fläche. Die Eigenschaften der Schaar ( $s$ ) erlauben verschiedene Schlüsse zur Erforschung der Singularitäten der Fläche. Spezielle Fälle solcher Flächen sind die allgemeine Fläche dritter Ordnung, sowie zwei Flächen fünfter Ordnung, von denen die eine von Clebsch, die andere von Cremona untersucht ist.

My.

















welche in den F. d. M. VIII. 1876. p. 537, IX. 1877. p. 590 und XII. 1880. p. 628 referirt ist. werden die in der Ueberschrift bezeichneten Abbildungen einer genauen Discussion unterworfen, und es werden namentlich die Eigenschaften der sogenannten Hyperbeln und Lemniscaten  $n^{\text{ter}}$  Ordnung untersucht. Es ergibt sich hierbei eine grosse Zahl einfacher Beziehungen, welche durch die betrachtete Verwandtschaft ohne Weiteres erkannt werden. Namentlich wird auch die eindeutige conforme Abbildung zweier Kegel auf einander durchgeführt, welche abgewickelt Sectoren von  $\frac{360^\circ}{m}$  und  $\frac{360^\circ}{n}$  bilden, wenn drei gegebenen Punkten der einen Fläche drei gegebene Punkte der anderen entsprechen. Endlich werden auch einige kinematische Untersuchungen angestellt.

A.



bung sich ein richtiges Bild der Brückenwage zeichnen würde, bezweifelt Referent. Am Schluss ist eine Anzahl Aufgaben angefügt. O.

---

H. UNDEUTSCH. Einführung in die Mechanik. Freiberg.  
Graz u. Gerlach.

Das vorliegende 447 Seiten umfassende Buch ist wesentlich für die Zuhörer des Verfassers bestimmt. Es giebt, seinem Umfange nach, das gewöhnlich in elementaren Vorlesungen über Mechanik Gegebene und ist seinem Zweck entsprechend bis in die Details eingehend geschrieben. Es ist dabei, da es nicht für eigentliche Mathematiker bestimmt ist, hauptsächlich Rücksicht genommen auf ein gründliches Klarmachen des Gegebenen, und dies scheint durch die recht detaillirte Durchführung auch von Einzelheiten erreicht. Neben einer Einleitung, die eine Uebersicht über den Inhalt der Mechanik giebt und die Definitionen der ihr zugehörigen Begriffe vorwegnimmt, besteht das Buch aus vier Abteilungen, in denen übrigens die schon vorher besprochenen Definitionen an betreffender Stelle wiederholt und erläutert werden. Der erste Abschnitt enthält das Notwendigste der Kinematik in zwei Theilen, deren erster die einfache und deren zweiter die zusammengesetzte Bewegung eines mathematischen Punktes behandelt. Dabei wird mehr, als es gewöhnlich zu geschehen pflegt, auf die Geschwindigkeitscurve im Zusammenhang mit der Bahn eingegangen. Abschnitt 2 giebt die Bewegungslehre eines materiellen Punktes. Im ersten Theil sind die nötigen Auseinandersetzungen über Kraft, Masse, Gewicht, mechanische Arbeit, Princip der lebendigen Kräfte, Antrieb einer Kraft, statische Momente und das Princip der Flächen enthalten. Die drei folgenden Theile dieses Abschnittes behandeln dann der Reihe nach die freie, die unfreie und die relative Bewegung eines materiellen Punktes. Der dritte Abschnitt ist der Bewegungslehre eines Körpers gewidmet. Nach den ersten Erläuterungen ist im Theil II. das Capitel der Kräfte, äusseren und inneren, an einem starren Körper behandelt, dem im Theil IV. die freie Bewegung eines starren









läuft in unendlicher Zeit durch  $\varepsilon$  und umschwebt das Tangential-  
 Geraden Element  $\varepsilon$  mit  $\varepsilon$  unter einer progressiven  
 Rotation verläuft  $\varepsilon$  mit  $\varepsilon$  unter einer solchen, dass die  
 beiden Bewegungselemente der progressiven Punkte in dem  
 augenblicklichen Bewegungszustand zusammenfallen. Aus dieser  
 Bestimmung wird eine Reihe von Fällen möglich. Hier die prominent-  
 esten unter den Fällen der Geraden unter Tangentialen zu  
 einer Kurvenkurve gezogen haben. Schm.

J. des Math. Mécanisme des courbes et des surfaces  
 de l'espace. Paris. Ann. VII. 1877.

Der Verfasser geht von der allgemeinen Forderung der  
 Curven aus und sucht aus derselben ihre charakteristischen Eigen-  
 schaften zu. Er versucht auf diese Weise nach einander:  
 1, die Gerade, 2, die Kreiseide, 3, die Hyperide, 4 die  
 Arcusoiden, 5, die Erzeugnisse des Kreises, 6, die Ellipse,  
 7, die Parabel, 8, die Curven einer Cyäberfläche. An die Be-  
 sprechung der Kurvenkurven an lassen sich einige Betrachtungen  
 über die Bewegung eines Punktes in einem Geschäfte, welches  
 mit parallelen Zügen versehen ist. G.

P. A. MacMahon. A property of pedal curves. Mess. (2)  
 X. 190-191.

Die Notiz bezieht sich auf folgendes Problem: „In jedem  
 Punkte eines Kreises wird eine uniehbare Schnur befestigt,  
 grade lang genug, um bis zu einem festen Punkte ausserhalb des  
 Kreises zu reichen, in dem alle Schnüre in einem Knoten ver-  
 einigt sind. Wenn der Knoten nun in der Ebene des Kreises so  
 bewegt wird, dass einige der Schnüre immer gespannt sind, so  
 beschreibt derselbe eine Spirallinie.“ Gl. (0.).

DARBOUX. Sur le déplacement d'une figure in-  
 rinable. C. R. XCII. 118-121.













sechs Punkte  $1, 2, 3, 4, 5, 6$  umschreiben und gleichzeitig durch eine einfache Gleichung verknüpft. Zeichnen nämlich  $1, 2, 3$  die Dreiecksfläche, welche durch die Punkte  $1, 2, 3$  gebildet wird, so ist dieselbe gegeben durch

$$P_{1,2,3} = P_{2,3,4} = P_{3,4,5} = P_{4,5,6} = -\frac{1}{2} P(1, 2, 3),$$

wobei  $P$  die Potenz des Punktes  $4$  gegen über dem Dreieck  $1, 2, 3$  umschriebenen Kreises bedeutet. Hierin liegt eine Verallgemeinerung eines Theorems von Herrn Lewylander (Mon. VII. p. 125. 1877. neue F. d. M. IX. p. 348). Es springt das Auge sofort, analog die Bedingung gesetzt wird, dass das System nur mit einer vollen Umdrehung bei der Bewegung nach  $P$  zur alten Lage im  $r$ -System, welche bei einem ganz willkürlichen Bewegungsweg gleiche Bogenlängen umziehen, so entspricht dieser Forderung eine Schaar von Geraden, welche einen Kreis umfassen: die Geraden, welche durch seinen Mittelpunkt gehen, umziehen Bogen, deren Längen, in bestimmtem Sinne gerechnet, den Wert Null haben. Drei Gerade  $1, 2, 3$ , welche sich in einem Punkte schneiden, umziehen drei Bogenlängen  $S_1, S_2, S_3$ , welche durch die Gleichung

$$S_1 \sin(1, 2) + S_2 \sin(2, 3) + S_3 \sin(3, 1) = 0$$

in Verbindung stehen. Für starre Systeme ist dieser Satz von Herrn Darboux (Darboux Bull. II. p. 345 & F. d. M. X. 1878. p. 592-593), zuerst aufgestellt worden. Endlich sind auch die vier Bogenlängen, welche von vier beliebigen Systemgeraden beschritten werden, durch eine einfache Gleichung verbunden. Bezeichnet  $J_{1,2,3}$  die aus den Geraden  $1, 2, 3$  gebildete Dreiecksfläche und  $r_{1,2,3}$  den Radius des ihr umgeschriebenen Kreises, so ist

$$S_1 \frac{J_{2,3,4}}{r_{2,3,4}} + S_2 \frac{J_{3,4,5}}{r_{3,4,5}} + S_3 \frac{J_{4,5,6}}{r_{4,5,6}} + S_4 \frac{J_{5,6,1}}{r_{5,6,1}} = 0.$$

Äußerlich einfache Gesetze ergeben sich, wenn man die von Systemräumen umzogenen Flächenräume in Betracht zieht. Bedeutet  $\tau$  das Flächenstück, welches durch den von einer Systemgeraden umschriebenen Bogen und die Richtstrahlen nach seinen Endpunkten begrenzt ist, so bewahrt dieses  $\tau$  denselben Wert















Theorie der von Herrn Sylvester erfundenen Geradföhrung. B.

---

P. RICHELMY. Sulle ruote dentate. Torino, Atti XVI. 29-44.

Der Verfasser bespricht zunächst die Anforderungen, welche an Zahnräder zu stellen seien, und erörtert dann die Probleme, welche sich aus diesen Forderungen ergeben. Die analytische Behandlung mehrerer dahin gehöriger Probleme, die den Hauptinhalt der Arbeit bilden, liefert vom mathematischen Standpunkt aus nichts Erwähnenswerthes. O.

---

Lösungen von Aufgaben und Beweise specieller Lehrsätze aus der Kinematik von S. ROBERTS, G. HEPPEL, W. B. GROVE, G. F. WALKER, J. O'REGAN, D. EDWARDS, J. H. TURRELL finden sich ferner Ed. Times XXXIV, 46-47, 102, XXXV. 43-44, 85. O.

---

### Capitel 3.

### S t a t i k.

#### A. Statik fester Körper.

O. FABIAN. Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten. Krak. Ber. 1881. (Polnisch). Dn.

---

E. W. HYDE. Mechanics by quaternions. Anal. VIII. 17-24, 49-55.

Fortsetzung der früheren Notizen in Bd. VII. 137, 177, siehe F. d. M. XII. 1880. p. 654. Jn. (O.).

---





























































Das System muss verschoben werden, um die Arbeit auszuüben und weil die wirkende Kraft es nur zu einem kleinen Grade aus einer festen Lage weicht.

H. CREMONA. Sur la valeur des éléments infinitésimaux.  
Ann. Sci. Éc. Norm. 1891.

Der Verfasser zeigt im ersten Teil, dass die Zugmittelpunkte der einzelnen Parabeln für die Bestimmung der infinitesimalen Elemente zu allen Umständen hinreichend sind. Der zweite Teil handelt von der annäherungsweise Bestimmung der Schnittmomente einer Welle. Die Arbeit ist mathematisch nicht Wesentliches.

G. A. MAGGI. Sul moto di un filo flessibile ed inestensibile che si sposta perpendicolarmente alla sua posizione d'equilibrio. Rend. S. III. 1901.

Der Verfasser betrachtet die Bewegung eines homogenen, ausdehnungslosen Fadens von variabler Dichtigkeit, der sich in einem widerstandsfreien Mittel befindet und gegebenen Kräften ausgesetzt ist, unter der Voraussetzung, dass sich die einzelnen Punkte nur wenig aus ihrer Gleichgewichtslage entfernen. Die Arbeit zerfällt in drei Teile. Im ersten werden die Gleichungen der oscillatorischen Bewegung des Seiles ohne irgend welche spezielle Annahmen über die Kräfte aufgestellt, und zwar in doppelter Weise, einmal für die Componenten der Verrückung, parallel zu irgend welchen drei orthogonalen Axen; zweitens werden dann Relationen aufgestellt zwischen den longitudinalen und den transversalen Vibrationen, welche letztere teils in der osculirenden, teils in der dazu normalen Ebene gelegen sind. Im zweiten Teile werden diese Gleichungen reducirt unter der Annahme, dass die wirkende Kraft in Intensität und Richtung constant bleibt. Der dritte Teil beschäftigt sich mit der Integration der einfacheren Gleichungen sowohl für den Fall, dass das eine fest ist, als für den, dass beide fest sind, wenn für





















































Kreis auf eine Halbebene und diese auf ein Dreieck abbilden lasse.

Nach Reproduction der Kirchhoff'schen Entwicklungen wird für den Fall eines gleichseitigen Dreiecks nun die abbildende Function zunächst direct gesucht, wobei zu bemerken ist, dass die Lösung eigentlich unmittelbar durch die bekannten Eigenschaften derjenigen elliptischen Functionen gegeben war, für welche der reelle Teil der complexen Periode halb so gross ist, wie die reelle Periode.

Eine zweite Lösung leitet der Verfasser durch die Methode der wiederholten Spiegelung ab und zeigt dann die Identität beider Lösungen.

B.

---



































































nicht erfüllt ist. Dies Princip, das zwar hypothetisch ist, sich aber durch naturgemäße Betrachtungen aus den Symmetrieverhältnissen ergibt, bildet die Grundlage der Rechnung. Der Verfasser denkt die Ringe im einseitigen reflectirten Lichte entstanden an einer Lamelle, die dadurch geildet ist, dass eine planparallele Glasplatte auf einer Kugelfläche (Linse) aufliegt; und zwar sei die Dicke der Platte klein gegen den Kugelradius. Er betrachtet nun zunächst eine einzelne ebene Welle, die zuerst in der planparallelen Platte hineingebrochen, dann theils an der Oberfläche der Lamelle, theils im Innern derselben reflectirt, endlich aus der planparallelen Platte wieder in Luft hineingebrochen wird. Durch irgend einen Punkt  $P$  des Raumes gehen nun zwei von der betrachteten ebenen Welle herrührende Strahlen (nötigenfalls rückwärts verlängert). Die Wegdifferenz, welche beide in  $P$  besitzen, wird dann vermittle einer längeren Rechnung ausgedrückt durch die Coordinaten von  $P$ , die Richtungscosinus der einfallenden Wellennormale, den Kugelradius  $r$  und die Dicke der planparallelen Platte. Dabei wird, da die Coordinaten von  $P$  stets kleine Größen gegen  $r$  sind, nach Potenzen des Quotienten dieser Größen entwickelt und die Glieder vierter Ordnung vernachlässigt. Wendet man den so ermittelten Ausdruck der Wegdifferenz auf diejenigen einfallenden Wellen an, aus denen die oben erwähnten Hauptpaare entstehen, benutzt dann obiges Princip, so findet man, das für jeden Punkt eines dunklen Ringes zwei Gleichungen zu erfüllen sind: die erste derselben ist im Wesentlichen die der bisherigen Theorie; die zweite giebt an, wie weit von der Lamelle derjenige Punkt entfernt ist, auf den man einstellen muss, um irgend einen Ringpunkt möglichst deutlich zu sehen. Die Discussion dieser Gleichungen, von denen noch gezeigt wird, dass sie sich durch Berücksichtigung der wiederholten Reflexionen innerhalb der Lamelle nicht ändern, liefert nun folgende Resultate:

1. Steht die Axe des Beobachtungsinstruments senkrecht auf der planparallelen Platte, so liegen die Interferenzorte in der Ebene der Lamelle.
2. Für einen andern Neigungswinkel  $\vartheta$  dagegen bildet jeder einzelne Ring eine Curve doppel-







































A. KIEL. *Geschichtliche Entwicklung der mathematischen Elektrotheorie und Bestimmung des Potentials für die letztere*. Bonn Ann. LIVII 123-231.

Repräsentierende Darstellung der Grundprinzipien der Elektrostatik und Elektrodynamik, sowie der Kirchhoff'schen Ableitung des Ohm'schen Gesetzes aus dem elektrostatischen Grundgesetz. Dasselbe finden sich einige historische Notizen, die jedoch lückenhaft und wenig eingehend sind. Sonst zieht der Verfasser in keiner Richtung, ebenso wenig Vollständiges. Wn.

L. LEVY. *Sur la possibilité de l'équilibre électrique*. C. R. XCIII 76-78.

Wenn einer beliebigen Zahl  $n$  von gegenseitig isolirten Leitern ( $S_1$  bis  $S_n$ ) die Elektrizitätsmengen  $E_1$  bis  $E_n$  mitgeteilt worden sind, so besteht eine gewisse Anordnung der freien Elektrizität auf den Oberflächen der Leiter, und diese ist nur auf eine Art möglich. Die Behandlung dieses Problems führt auf ein System von  $n$  linearen Gleichungen von der Form

$$c_1 u_{11} + c_2 u_{12} + \dots + c_n u_{1n} = -4\pi E_1.$$

Damit die Lösungen dieses Systems einen einzigen bestimmten Wert haben, ist es notwendig, dass die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist. Aus der Bedeutung der Grössen  $u$  lässt sich zeigen, dass 1) die Elemente der Diagonale  $u_{11}$  bis  $u_{nn}$  negativ sind, 2) alle übrigen Elemente positiv, 3) die Summe der Elemente einer Horizontalreihe negativ ist. Der Verfasser beweist nun den Satz, dass eine Determinante, welche diese Eigenschaften besitzt, einen Wert hat, welcher durch

$$\Delta_n = (-1)^n Q$$

ausgedrückt werden kann, wo  $Q$  eine positive Zahl bedeutet. Also verschwindet die in Frage kommende Determinante nicht,



**Green'sche Function bestimmt.** Es folgen dann noch Vergleichen-  
 der Summenformeln in dipolaren Coordinaten mit den entsprechen-  
 den Formeln in Polareordinaten. Ok.

---

**H. ZIMMERMANN.** Ueber die Verteilung der statischen  
 Elektrizität auf einem Conductor, welcher die Gestalt  
 einer durch Rotation entstandenen Fresnel'schen Elasti-  
 citätsfläche hat. Diss. Göttingen.

Bekanntlich entsteht die Fresnel'sche Elasticitätsfläche durch  
 Abbildung eines Ellipsoids nach der Methode der reciproken  
 Radienvectoren. Nach derselben Methode, in ihrer Verwendung  
 bei der Elektrostatik kann die Verteilung der freien Elektrizität  
 auf der einen Fläche berechnet werden, wenn das Problem der  
 Influenz einer Masse in Bezug auf die abgebildete Fläche gelöst  
 ist, und umgekehrt. Der Verfasser geht daher von der F. Neu-  
 mann'schen Lösung des Influenzproblems für das Ellipsoid aus  
 und leitet daraus die Dichtigkeit für die Fresnel'sche Fläche  
 für den Fall ab, dass derselben eine gewisse Elektrizitätsmenge  
 mitgeteilt worden ist. Im zweiten Teil wird dann in ähnlicher  
 Weise das Problem der elektrischen Verteilung für den Fall  
 einer ausserhalb gelegenen influenzirenden Masse gelöst.

Ok.

**W. URBANŃSKI.** Ueber die Art der Verteilung der Elek-  
 tricität auf zwei isolirten kugelförmigen Leitern.  
 Par. Denkschr. 1881. (Polnisch).

Dn.

**W. URBANŃSKI.** Ueber die Art der Verteilung der Elek-  
 tricität auf einem freien ellipsoidalen Leiter und über  
 die Wirkung des letzteren auf einen äusseren Punkt.  
 Par. Denkschr. 1881. (Polnisch).

Dn.



























sein. Die primäre elektromotorische Kraft  $E$  kann nicht über eine gewisse Grenze ( $E_0$ ) gesteigert werden, da sonst die Isolation der Leitungen leidet. Der Gesamtwiderstand  $S$  kann also nicht grösser genommen werden, als  $\frac{E_0^2}{4T_u}$ . Sind die beiden Maschinen Dynamo-Maschinen, so kann man setzen

$$E = \varphi(J) \cdot n_0 \sqrt{a_0 b_0}, \quad E' = \psi(J) \cdot n'_0 \sqrt{a'_0 b'_0}.$$

Hier sind  $n_0$  und  $n'_0$  die Umdrehungszahlen der beiden Maschinen,  $a_0, b_0$  etc. die Widerstände der Umwindungen der Eisenkerne und Ringe in den beiden Maschinen,  $\varphi(J)$  und  $\psi(J)$  Functionen der Stromstärke, welche für schwache Ströme proportional mit  $J$  sind. Ist endlich der äussere Widerstand der Leitung  $R$ , so ist

$$S = a_0 + b_0 + a'_0 + b'_0 + R.$$

Mit Hülfe der aufgestellten Gleichungen kann man die Grössen  $J, E', n_0, n'_0$  und endlich  $\frac{T_u}{T_m}$ , das Verhältniss der gewonnenen zur aufgewandten Arbeit, berechnen.

In der zweiten Notiz werden diese Rechnungen auf ein Zahlenbeispiel angewandt, welches auf einer Reihe numerischer Angaben von M. Deprez beruht. Ok.

W. THOMSON. Sur les résistances relatives que l'on doit donner, dans les machines dynamo-électriques, aux bobines actives, aux électro-aimants inducteurs et au circuit intérieur. C. R. XCIII. 474-479.

Für eine gewöhnliche Maschine (mit unverzweigtem Schliessungskreis) findet der Verfasser für das Verhältniss ( $r$ ) der nutzbaren Arbeit zu der in Wärme verwandelten, also verlorenen Arbeit den folgenden Ausdruck:

$$r = \frac{J \sqrt{RR'} \cdot v}{(R + R') KK'}.$$

Hier bezeichnen  $v$  die Rotationsgeschwindigkeit der Maschine,  $R$  und  $R'$  die Widerstände des Elektromagneten und der inducirten Spirale;  $K$  und  $K'$  sind Constanten, während  $J$  von dem





















oben beschriebenen Art angesehen werden. Obgleich die Ablenkungen nur klein waren, stimmten sie doch mit den dafür berechneten Werten im Ganzen überein. Ok.

---

K. SCHERING. Beobachtungen im magnetischen Observatorium. Gött. N. 1881. 133-176.

Die Horizontal-Intensität des Erdmagnetismus wurde von dem Verfasser nach den von Gauss gegebenen Regeln für eine Reihe von Tagen des Jahres 1880 bestimmt. Dieselbe nimmt zu. Es liegen darüber Bestimmungen von 1834 an vor. Gauss fand sie gleich 1,7748. 1880 war dieselbe auf 1,863 gewachsen. Ok.

---

## Capitel 4.

### W ä r m e l e h r e.

R. CLAUSIUS. Ueber die theoretische Bestimmung des Dampfdruckes und der Volumina des Dampfes und der Flüssigkeit. Wiedemann Ann. (2) XIV. 279-290, 692-704.

R. CLAUSIUS. Sur une détermination générale de la tension et du volume des vapeurs saturées. C. R. XCIII. 619-625.

1) Die Versuche von Andrews mit Kohlensäure konnte der Verfasser durch die Formel

$$(1) \quad p = R \frac{T}{v - \alpha} - \frac{c}{T(v - \beta)^2}$$

darstellen. Diese Gleichung genügte aber nicht für andere Stoffe, z. B. für Wasserdampf. Im letzten Gliede muss für  $\frac{c}{T}$  eine allgemeinere Temperaturfunction genommen werden.









Nach der Abhandlung „Versuche über die Verdampfung“ (Wien. Ber. LXVIII. 385-423) ist

$$v = - \frac{k}{P-p} \frac{dp}{dx}.$$

Diese Formel bildet die Grundgleichung für die mathematische Behandlung der stationären Verdampfungsprocesse überhaupt. Wenn  $P$  innerhalb des zu betrachtenden Raumes constant ist, d. h. wenn von der Wirkung äusserer Kräfte, wie der Schwere, abgesehen wird, hat man es mit denselben Gleichungen zu tun, welche auch in der Theorie der Wärmeleitung und der Elektrostatik vorkommen. Man kann die Lösung elektrostatischer Aufgaben zur Berechnung von Verdampfungsprocessen verwenden, falls ausser den Grundgleichungen auch die Grenzbedingungen übereinstimmen. Maxwell hat bei der Entwicklung der Theorie eines im freien Raume befindlichen Psychrometers zuerst die Analogie zwischen den Gleichungen der Elektrostatik und jenen der Diffusionstheorie angewendet, dabei jedoch statt obiger Gleichung die Formel

$$v = - \frac{k}{P} \frac{dp}{dx}$$

benutzt. Nach diesen Vorbemerkungen wird die Aufgabe gelöst: „In einer unendlichen Ebene, welche keinen Dampf aussendet, auch keinen absorbiert oder durchlässt, befindet sich eine Vertiefung, welche mit einer Flüssigkeit derart gefüllt ist, dass das Niveau der Flüssigkeit mit dieser Ebene zusammenfällt. Die Flüssigkeit verdampft in die oberhalb der Ebene befindliche unbegrenzte Luft. Es soll die Dampfmenge berechnet werden, welche in der Zeiteinheit aus der Flüssigkeit in die Atmosphäre übergeht, vorausgesetzt, dass die Verdampfung im stationären Zustande sich befindet.“ Das elektrostatische Analogon zu dieser Aufgabe ist die Bestimmung der Verteilung der Elektrizität auf einer unendlich dünnen leitenden Platte im Zustande des Gleichgewichts. Als Verdampfungs menge wird gefunden

$$V = 2\pi kC \log \frac{P-p_0}{P-p_1},$$

wo  $C$  die elektrische Capacität der entsprechenden Platte be-

deutet; für eine kreisförmige Platte ist  $C = \frac{2a}{\pi}$ . Für ein kreisförmiges Becken ist die Verdampfungs menge also nicht, wie gewöhnlich angenommen wird, dem Flächeninhalte des Beckens, sondern dem Radius desselben proportional. Die Verdampfung aus einer Fläche, deren Begrenzung keine sehr langgestreckte Ellipse ist, unterscheidet sich nur wenig von der aus einer kreisförmig begrenzten Fläche; für lang gestreckte Ellipsen ist sie grösser. Die Verdampfung kann nicht nur für die ganze kreisförmig oder elliptisch begrenzte Oberfläche, sondern für jeden einzelnen Teil derselben berechnet werden, denn in beiden Fällen ist das Gesetz bekannt, nach welchem die Elektrizität auf der entsprechenden Platte im Gleichgewichtszustande verteilt ist. Bei dieser Berechnung wird gefunden, dass die feste Umgrenzung der Flüssigkeit sich in der Form eines Hyperboloids über das Niveau der Flüssigkeit erheben kann, ohne die Verdampfung aus der Fläche zu stören. Rs.

---

BIEHRINGER. Ueber eine Erweiterung des Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetzes. Schlömilch Z. XXVI. 377-383.

Ein Gas habe bei derselben Temperatur und den Drucken  $p$  und  $p'$  die Volumina  $v$  und  $v'$  und die Dichtigkeiten  $d$  und  $d'$ . Nach dem Boyle'schen Gesetze ist  $p:p' = v':v$ ,  $p:p' = d:d'$ , folglich  $d:d' = v':v$ . Es bezeichne  $q$  das absolute Gewicht des Gases; dann wird gesetzt  $d = \frac{q}{v}$  und  $d' = \frac{q}{v'}$ . Hierzu nimmt der Verfasser den Satz: „Bei gleicher Dichtigkeit und Temperatur verhalten sich die Drucke zweier Gasarten umgekehrt wie ihre specifischen Gewichte ( $s$  und  $s'$ ); also  $p:p' = s':s$ .“

Zwei Gasarten (1 und 2) seien durch  $s, v, p, q$  bez.  $d$  und durch  $s', v', p', q'$  bez.  $d'$  charakterisirt, ihre Temperaturen sollen gleich sein. Das Mittelglied bilde eine dritte Gasmenge (3), für welche man  $s, d', p''$  hat. Der Verfasser erhält

durch Uebergang von 1 zu 3  $p:p'' = d:d'$  oder  $p'' = p \cdot \frac{d'}{d}$ ,

„ „ „ 3 „ 2  $p':p'' = s:s'$  „  $p'' = p' \cdot \frac{s'}{s}$ ,

folglich

durch „ „ 1 „ 2  $p \cdot \frac{s}{d} = p' \cdot \frac{s'}{d'}$ ,  
oder

$$(1) \quad ps \cdot \frac{v}{q} = p's' \cdot \frac{v'}{q'}.$$

Für atmosphärische Luft bei 0° berechnet der Verfasser

$$p's' \cdot \frac{v'}{q'} = 11522000 = C.$$

Mit Hülfe der Gleichung

$$(2) \quad ps \cdot \frac{v}{q} = C$$

kann jede der vier links stehenden Grössen für die Temperatur 0° berechnet werden, wenn die drei anderen gegeben sind. Indem man gewisse dieser Grössen gleich 1 setzt, gelingt es, für C physikalische Deutungen zu erhalten. Da  $\frac{q}{pv}$  die Dichtigkeit beim Drucke 1 ist, folgt aus Gleichung (1): Die Dichtigkeiten zweier Gase verhalten sich bei gleichem Druck und gleicher Temperatur wie ihre specifischen Gewichte. Besitzen die Gasarten 1) und 2) die Temperaturen  $t$  und  $t'$  statt der Temperatur 0°, so ist

$$\frac{psv}{q(1 + \alpha t)} = C = \frac{p's'v'}{q'(1 + \alpha t')}.$$

In dieser Gleichung sind die beiden Sätze enthalten: 1) „Gase, deren Dichtigkeiten den specifischen Gewichten proportional sind, üben bei gleicher Temperatur gleiche Drucke aus.“ 2) „Gase mit gleichen Dichtigkeiten üben bei gleichen Temperaturen Drucke aus, welche den specifischen Gewichten umgekehrt proportional sind.“ Man kann statt der Dichtigkeit das absolute Gewicht

das Volumen der Gase einführen und erhält dann andere  
ulirungen der Sätze.

Rs.

GOUILLY. Sur la fonction qui exprime l'état gazeux et sur la fonction  $\lambda$ , telle que  $\frac{dQ}{\lambda}$  est une différentielle exacte. C. R. XCIII. 1134-1137.

Als Zustandsgleichung für Gase hatte der Verfasser in einer früheren Mitteilung die Gleichung

$$(p + m')(v + m'') + mT = 0$$

gegeben. Die Temperatur wird definirt durch die Gleichung

$$(1) \quad \frac{v - v_0}{v_0(T - T_0)} = \frac{v_{100} - v_0}{v_0 \cdot 100} = \alpha.$$

Wenn  $dQ$  die Wärmemenge bezeichnet, die notwendig ist, um einen Körper vom Zustande  $(T, p, v)$  in den Zustand  $(T + dT, p + dp, v + dv)$  überzuführen, und, wenn man die innere Wärmemenge mit  $U$  bezeichnet, so ist

$$dQ = dU + p dv.$$

$p$  und  $T$  sind unabhängige Variable,  $\frac{dQ}{\lambda}$  soll ein vollständiges Differential sein. Experimente von Regnault sprechen für den Satz: „Die specifischen Wärmen bei constantem Drucke und bei constantem Volumen sind von der Temperatur und dem Drucke unabhängig.“ Durch Benutzung desselben gewinnt man die Gleichung

$$(2) \quad \frac{\frac{dv}{dT}}{\frac{d\lambda}{dT}} = k,$$

wo  $k$  eine willkürliche Function des Druckes ist. Nach Gleichung

(1) ist  $\frac{dv}{dT} = \alpha v_0$ , folglich hat man

$$\frac{d\lambda}{dT} = \frac{1}{k} \alpha v_0.$$

„Das zweite Glied muss sich auf eine Constante reduciren, weil nach dem Theorem von Carnot  $\lambda$  nur von der Temperatur abhängt; ist  $k'$  diese Constante,  $k''$  eine andere, so hat man

$$\lambda = k'T + k''.$$



















$$pv = \frac{1}{3} m N \bar{u}^2 \left[ 1 - 2f\left(\frac{b}{v}\right) \right]$$

gewonnen. Denkt man sich  $f\left(\frac{b}{v}\right)$  nach aufsteigenden Potenzen von  $\frac{b}{v}$  entwickelt, so bekommt man durch Benutzung des Satzes vom Virial den Wert  $v$  des ersten Gliedes,  $-\frac{1}{2} \frac{b}{v}$ .

Rs.

---

H. A. LORENTZ. Les équations du mouvement des gaz et la propagation du son suivant la théorie cinétique des gaz. Arch. Néerl. XVI. 1-46.

Siehe F. d. M. XII. 1880. p. 814.

---

D. J. KORTEWEG. Ueber den Einfluss der räumlichen Ausdehnung der Molecüle auf den Druck eines Gases. Wiedemann Ann. (2) XII. 136-146.

Gegen die Bemerkung von Clausius (siehe F. d. M. 1880. XII. 818-819), dass es keinen Nutzen habe, jetzt bereits die mittlere Weglänge der Molecüle genauer zu berechnen, als es seiner Zeit von ihm geschehen ist, wird hervorgehoben, dass der Verfasser und van der Waals in den bezüglichen Arbeiten nicht eine Verbesserung der früheren Angaben über diese Weglänge, sondern eine indirecte Berechnung des Einflusses der räumlichen Ausdehnung der Molecüle auf den Gasdruck erstrebten. Ebenfalls im Arch. Néerl. XII. veröffentlichte der Verfasser eine directe Bestimmung der Druckvermehrung, welche Clausius nicht besprochen hat. Der Inhalt dieser Arbeiten, sowie der einer Arbeit von H. A. Lorentz (Wiedemann Ann. (2) XII. 127-136, s. p. 817) werden skizzirt. Der Verfasser bleibt bei der Ansicht, dass aus der Grösse  $b$  der van der Waals'schen Formel mit Sicherheit auf den Wert des Gesamtvolumens der Molecüle geschlossen werden kann. Es bleibt nur die Frage zu erledigen,

ob jene Formel für mässige Gasdrucke als richtig zu betrachten ist, oder ob sie durch eine andere, z. B. durch die von Clausius gegebene, ersetzt werden muss. Die von Clausius für Kohlensäure aufgestellte Gleichung ist in ziemlich guter Uebereinstimmung mit der Thomson'schen und Joule'schen (Phil. Trans. 1854. p. 321 u. 1862. p. 579), aber in bestimmtem Widerspruch mit Regnault'schen Beobachtungen (Mém. de l'Institut. XXI. 1847). Die van der Waals'sche Gleichung entspricht den Versuchen von Regnault, führt dagegen für die von Joule und Thomson beobachtete Erscheinung zu einem Gesetze, welches der Gestalt nach von dem der letzteren abweicht. Das Gesetz liefert für Luft Zahlen, welche mit den erhaltenen auffallend gut übereinstimmen; für Kohlensäure ist eine solche Uebereinstimmung nicht vorhanden. Der Verfasser hat die von Amagat gemessenen Ausdehnungscoefficienten der Kohlensäure bei atmosphärischem Drucke nach beiden Zustandsgleichungen berechnet. Die Formel von van der Waals giebt den Beobachtungen entsprechendere Werte, als die von Clausius.

Rs.

L. BOLTZMANN. Zur Theorie der Gasreibung. II. Teil.  
Wien. Ber. LXXXIV. 40-135.

In dieser Fortsetzung der vorjährigen Mitteilung (Wien. Ber. 1880. 117-158, siehe F. d. M. XII. 819-821) wird zunächst bewiesen, dass bisher bei Berechnung der Reibungsconstanten Grössen von der Ordnung der ausschlaggebenden vernachlässigt wurden. Zur Berechnung des Reibungscoefficienten giebt es keinen anderen Weg, als den der Bestimmung einer gewissen Function, über welche bereits in der ersten Mitteilung gesprochen wurde; denn auch die Maxwell-Meyer'sche Methode führt zu derselben jene Function enthaltenden Gleichung, sobald alle Glieder derselben Grössenordnung gleichmässig berücksichtigt werden. Der Verfasser will für jene Function verschiedene Reihenentwickelungen geben; so lange deren Convergenz nicht bewiesen ist, bleibt allerdings für diese Art der Bestimmung des Reibungscoefficienten eine gewisse Unsicherheit bestehen.







bereits 1873 von Joulin (in seinen Recherches sur les doubles décompositions salines, Note B. Ann.de Chim. et Phys. (4) XXX. 284-287) geschah. Zwei Gase mögen das Bestreben haben, sich zu gleichem Volumen zu vereinigen.  $N$  und  $N'$  seien die Zahlen der freien Molecüle der Volumeneinheit,  $v$  und  $v'$  die Geschwindigkeiten dieser Molecüle ( $v' < v$ ),  $\lambda$  und  $\lambda'$  die intermolecularen Entfernungen in den beiden Gasen; dann ist nach Joulin

$$N\lambda^3 = N'\lambda'^3 = 1.$$

Wenn  $dy$  die Zahl der Molecüle der in der Zeit  $dt$  gebildeten Verbindung und  $K$  eine Constante ist, hat man

$$\frac{dy}{dt} = KNN',$$

falls  $\lambda$  viel grösser, als der Radius der Wirkungssphäre ist, d. h. falls der Druck gering ist. Für starke Drucke schlägt der Verfasser die Exponentialformel vor

$$\frac{dy}{dt} = KN^\beta N'^\beta.$$

Indem der Verfasser diese Gleichung benutzt, macht er einige Bemerkungen über die Dissociation homogener Systeme, wobei besonders der Einfluss des Druckes auf die Dissociation nach der Theorie und nach dem Experiment berücksichtigt wird.

Rs.

A. RITTER. Untersuchungen über die Höhe der Atmosphäre und die Constitution gasförmiger Weltkörper.

Wiedemann Ann. (2) X. 130-143, XI. 332-314, XII. 445-465, XIII 360-377, XIV. 610-634.

Diese theoretischen Betrachtungen sind die Fortsetzung derjenigen, über welche in F. d. M. XI. 1879. 781 berichtet wurde. Die wirkliche Höhe einer aus condensirbaren Gasen bestehenden Atmosphäre wird stets beträchtlich grösser sein, als die aus der Voraussetzung des idealen Gaszustandes berechnete Höhe. Die Oberflächentemperatur eines Weltkörpers wird einen gewissen Wert (die Dispersionstemperatur) nicht überschreiten dürfen, wenn die Existenz einer im Gleichgewichtszustande befindlichen





welche proportional mit  $N$  ist, und bezeichne mit  $\xi, \eta, \zeta$  die Coordinaten des Punktes  $N$ , dann erhält man Gleichungen, welche zeigen, dass bei Aenderung der Richtung von  $\omega$  1) der Ort der Punkte  $N$  eine um  $O$  beschriebene Kugel ist; 2) für eine gewisse Lage des Elementes  $\omega$  der Wärmezufluss einen Maximalwert hat, welcher als Hauptstrom bezeichnet sei; 3) der Wärmestrom nach einer anderen Richtung die Projection des Hauptwärmestromes auf diese Gerade ist. Rs.

E. BETTI. Sopra la propagazione del calore. Chelini, Coll. Math. 232-240.

Von den Lamé'schen Gleichungen (Leçons sur la théorie analytique de la chaleur pag. 27, 30)

$$(1) \quad \frac{\partial V}{\partial t} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum a_{is} \frac{\partial V}{\partial x_s} = 0,$$

$$(2) \quad h(V-v) = \sum_i \alpha_i \sum_s a_{is} \frac{\partial V}{\partial x_s}$$

wird ausgegangen, und es wird angenommen, dass für die Anfangszeit  $t = 0$  die Temperatur  $V_0$  durch eine im ganzen Raume  $S$  willkürlich gegebene Function

$$V_0 = f(x_1, x_2, x_3)$$

gegeben ist.  $U$  sei eine Function der Zeit und der Coordinaten, welche mit ihrer ersten Ableitung nach der Zeit und mit ihrer ersten sowie zweiten Ableitung nach den Coordinaten im ganzen Raume  $S$  und in dem Zeitintervall  $t = 0$  bis  $t = t_1$  endlich und stetig bleibt. Der Verfasser multiplicirt Gleichung (1) mit  $U dt dS$  und integrirt in Bezug auf den ganzen Raum  $S$  und die Zeit  $t_1$ . Die erhaltene Gleichung wird in eine andere (A) übergeführt, indem bestimmt wird: Es sei  $t' > t_1$ , und  $U$  sei so beschaffen, dass

$$(3) \quad \lim_{t_1=t'} \int_s U ds = 0,$$

wenn ein Raum  $s$  den Punkt  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  nicht enthält,

$$(4) \quad \lim_{t_1=t'} \int_{s'} U ds' = \omega,$$

wenn ein Raum  $s'$  den Punkt  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  enthält.

In Folge der weiteren Annahme, dass

$$(5) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_s a_{si} \frac{\partial U}{\partial x_s} = 0$$

ist, und  $V$  der Gleichung (2) genügt, verwandelt sich Gleichung (A) in

$$\omega V' = \int_S V_0 U_0 dS + \int_0^{t'} dt \int_\sigma \left[ hUv - V \left( hU - \sum_i \alpha_i \sum_s a_{si} \frac{\partial U}{\partial x_s} \right) \right] d\sigma.$$

Dabei ist  $V'$  der Wert von  $V$  im Punkte  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  zur Zeit  $t = t'$  beim Uebergang zur Grenze. Wenn  $U$  für  $\sigma$ , die Oberfläche von  $S$ , der Gleichung

$$hU = \sum_i \alpha_i \sum_s a_{si} \frac{\partial U}{\partial x_s}$$

genügt, hat man

$$V' = \frac{1}{\omega} \int_S V_0 U_0 dS + \frac{1}{\omega} \int_0^{t'} dt \int_\sigma hU v d\sigma,$$

d. h.  $V'$  wird für jeden Punkt im Innern von  $S$  durch gegebene Functionen ausgedrückt sein. Wenn die Leitungsfähigkeit in zwei einander entgegengesetzten Richtungen gleich ist, hat man  $a_{is} = a_{si}$ , und wenn der Körper homogen ist, sind die Coefficienten  $a_{is}$  constant. Für diesen Fall genügt den Gleichungen (3), (4), (5) die Function

$$U = \frac{e^{\frac{\varphi}{4(t'-t)}}}{(t' - t)^{\frac{3}{2}}},$$

indem zur Abkürzung gesetzt ist

$$\varphi = \sum_i \sum_s A_{is} (x_i - x'_i) (x_s - x'_s), \quad A_{is} = \frac{\partial D}{\partial a_{is}} \frac{1}{D},$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Für  $a_{is} = 0$ ,  $a_{ii} = 1$  hat man

$$D = 1, \quad \varphi = (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2 = r^2,$$

$$V' = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \left( V \frac{\partial}{\partial p} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial p} \right) d\sigma.$$

Endlich wird noch der Fall untersucht, wenn der Raum  $S$  sich nach allen Richtungen in's Unendliche ausdehnt, die Temperatur und ihre Ableitungen in Bezug auf die ganze Begrenzungsfläche  $\sigma$  Null ist, und für  $t = 0$  in einem Raunteile  $C$  die Function  $V$  einen von Null verschiedenen Wert hat. Für einen isotropen Körper ist  $a_{is} = 0$ ,  $a_{ii} = k = \frac{K}{c\rho}$ , wenn  $K$  die Leitungsfähigkeit,  $c$  die specifische Wärme und  $\rho$  die Dichtigkeit bedeutet. Folglich ist

$$\varphi = \frac{r^2}{k}, \quad D = k^3, \quad V' = \frac{1}{4\pi k \sqrt{\pi}} \cdot \int_C \frac{V_0 e^{-\frac{r^2}{4kt'}}}{\sqrt{4kt'^3}} dS.$$

Beltrami hat bemerkt (Cim (3) I. 20), dass die Integration von  $4\pi k V' dt'$  zwischen den Grenzen 0 und  $\infty$  eine Function giebt, welche der Newton'schen Potentialfunction einer im Raume  $C$  mit der Dichtigkeit  $V$ , zerstreuten Masse gleich ist. Die letzten Betrachtungen beziehen sich auf die physikalische Bedeutung jener Function. Rs.

W. L. MOLLISON. Note on conduction of heat. Mess. (2) X. 170-174.

Gegenstand der Arbeit ist die Lösung einiger Probleme über die veränderliche Bewegung von Wärme nach den Methoden, die Stokes in seiner Arbeit: „On the critical values of the sums of periodic series“ gegeben hat. Die Methode beruht darauf, dass, wenn eine Function nach Sinus oder Cosinus entwickelt ist, ihre Ableitung in eine Form gebracht werden kann, welche erlaubt, die Discontinuitäten der Function kenntlich zu machen.

Glr. (O.).

H. LORBERG. Ueber Wärmeleitung in einem System von Cylindern, und über die experimentelle Bestimmung der Leitungsfähigkeit des Wassers. Wiedemann Ann. (2) XIV. 291-308, 426-450.



Beobachtungen fand

$$k_0 = 0,0768$$

und als Mittel mehrerer Beobachtungsreihen

$$k_0 = 0,0745.$$

Ferner bekam der Verfasser

$$k_{18} = 0,09108 - 0,0046h,$$

während nach Weber

$$k_{18} = 0,0867,$$

oder gleich dem Mittelwert 0,0857 ist.

Rs.

C. CHRISTIANSEN. Einige Versuche über die Wärmeleitung. Wiedemann Ann. (2) XIV. 23-33.

Weber brachte den zu untersuchenden Körper zwischen zwei Kupferplatten; der Verfasser wendet drei in derselben Weise von einander getrennte Kupferplatten an, bringt in jeden der beiden Zwischenräume einen anderen Körper und bestimmt das relative Wärmeleitungsvermögen dieser beiden Körper. Man kann auch beide Zwischenräume mit demselben Stoffe füllen und dann das absolute Leitungsvermögen gewinnen. Das System befindet sich auf einem Messinggefässe, welches von kaltem Wasser durchströmt wird, und auf dem System befindet sich ein zweites Messinggefäss, durch welches warmes Wasser geleitet wird. Nachdem ein stationärer Temperaturzustand eingetreten ist, können die Temperaturen der drei Platten,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ , beobachtet werden. Die Leitungsfähigkeit des Körpers im oberen Zwischenraume sei  $K_1$ , die des anderen Körpers  $K_2$ , und zwar bez. bei den Temperaturen  $\frac{1}{2}(T_1 + T_2)$  und  $\frac{1}{2}(T_2 + T_3)$ . Die Grundfläche der Platten sei  $S$ , die Dicke  $e_0$ , das Leitungsvermögen  $K_0$  und ihre Entfernung von einander bez.  $e_1$  und  $e_2$ . Die Abhängigkeit der Leitungsfähigkeit von der Temperatur sei gegeben durch die Function  $K = k(1 + \alpha u)$ , worin  $k$  und  $\alpha$  constant sind. Ferner sei die äussere Wärmeleitungsfähigkeit für die Kupferplatten  $h$ , die cylindrische Oberfläche bei denselben  $A$ , die Temperatur der



Luft  $T_0$ . Dann hat man

$$Sk_1 \left( 1 + \frac{T_1 + T_2}{2} \alpha_1 \right) \frac{T_1 - T_2}{e_1} - Sk_2 \left( 1 + \frac{T_2 + T_3}{2} \alpha_2 \right) \frac{T_2 - T_3}{e_2} \\ = hA(T_2 - T_0). \\ \frac{K_1}{K_2} = \frac{e_1}{e_2} \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_2} \left( 1 + \frac{Ahe_2}{SK_1} \frac{T_2 - T_0}{T_2 - T_3} \right).$$

Um den Einfluss der Umgebung zu vermindern, muss man die Zwischenschichten so dünn als möglich nehmen und die mittlere Platte beinahe auf der Temperatur der umgebenden Luft,  $T_0$ , erhalten.

Bei Versuchen mit Luft in beiden Zwischenräumen war  $e_1 = e_2$ . Indem der Verfasser in obiger Gleichung ferner  $K_1 = K_2 = k$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  und  $\frac{1}{2}(T_1 - T_2) + \frac{1}{2}(T_2 - T_3) = s$  setzt, erhält er

$$\delta + \alpha(s^2 + \delta T_2) = \frac{hAe_1}{kS}(T_2 - T_0).$$

Zwischen den aus den Beobachtungen folgenden und den berechneten Werten von  $\delta$  ist gute Uebereinstimmung vorhanden, wenn man

$$\alpha = 0,001504, \quad \frac{hA}{ks} = 0,3931 \quad \text{und} \quad \frac{h}{k} 1,43$$

setzt. Dieser Wert von  $\alpha$  ist aber bedeutend kleiner, als der von Winkelmann angegebene (Pogg. Ann. CLVII. 514 u. CLIX. 177). Das Leitungsvermögen der Luft nimmt mit der Temperatur zu.

Ferner wurde der obere Zwischenraum mit Luft, der untere mit Flüssigkeit gefüllt, und zwar mit Wasser, Weingeist, Glycerin, Olivenöl, Citronenöl. Die Verhältnisse der Wärmeleitungsfähigkeit der Luft zu jeder dieser Flüssigkeiten wurden dann erhalten. Zur Controlle wurde eine Bestimmung für Olivenöl und Glycerin gemacht. Die gefundenen relativen Leitungsvermögen dieser Flüssigkeiten entsprechen in genügender Weise den von Weber gefundenen absoluten Leitungsvermögen. Die Versuche des Verfassers sind für die Temperatur nicht corrigirt; dies soll geschehen, wenn das Leitungsvermögen der Luft bei verschiedenen Temperaturen genauer bestimmt ist.

• Endlich wurde das Wärmeleitungsvermögen verschiedener fester Körper in Bezug auf das von Luft bestimmt, welche sich stets im oberen Zwischenraume befand. Damit sich zwischen dem zu untersuchenden Körper und den Kupferplatten kein schädlicher Raum bildete, brachte der Verfasser Wasser oder Glycerin dazwischen. Das Leitungsvermögen der Luft sei  $k$ , das des untersuchten Körpers  $xk$ . Es wurden zwei Versuche gemacht; die zu untersuchende Platte wird das eine Mal trocken, das andere Mal auf beiden Seiten befeuchtet eingelegt. Für Spiegelglas wurde  $x = 38,3$  und für Marmor  $x = 120$  gefunden.

In einer Schlussbemerkung weist der Verfasser darauf hin, dass die beschriebene Methode sich auch zur Messung elektrischer Widerstände eigne, wenn man statt der Temperatur das Potential misst. Wenn es sich um schnelle Messung mehrerer Widerstände handelt, könnte man mehrere Schichten übereinander legen, eine „Leitungssäule“ bauen. Rs.

L. LORENZ. Ueber das Leitungsvermögen der Metalle für Wärme und Elektrizität. Wiedemann Ann. (2) XIII. 422-447, 582-606.

Eine Metallstange vom Querschnitt  $q$  werde an einem Ende erwärmt und für sie sei das Leitungsvermögen  $k$ , die Wärmecapazität  $c$ , die Dichtigkeit  $\delta$ . Ferner seien  $u_0, u_1, \dots, u_n$  die Temperaturen in  $(n+1)$  um die Länge  $l$  von einander entfernten Punkten, und es werde gesetzt

$$u_0 - u_l - u_{(n-1)l} + u_{nl} = \Delta, \quad u_l + u_{2l} + \dots + u_{(n-1)l} = \Sigma.$$

Dann ist  $kq\Delta$  die vom betrachteten Teile der Stange in jeder Zeiteinheit empfangene Wärmemenge, welche teils zur Erwärmung des Metalles gebraucht (wozu der Betrag  $\delta ql \frac{d\Sigma}{dt}$  erforderlich ist), teils an die Umgebung abgegeben wird. Dieser letzte Teil ist eine Function der Temperatur und kann annähernd als eine Function der mittleren Temperatur  $\frac{\Sigma}{n-1}$  betrachtet wer-



Wärmemenge kennen zu lernen, wird der Fall untersucht: Eine Platte von der Höhe  $H$  und unendlich grosser Breite sei vertical aufgehängt und auf einer constanten Temperatur erhalten. Dann entstehen in der umgebenden kälteren Luft aufwärts gerichtete Strömungen, (die horizontalen Strömungen sollen vernachlässigt werden). Für jene Wärmemenge wird  $h\vartheta(1+\eta\vartheta^{\frac{1}{4}})$  gefunden statt des in neuerer Zeit angegebenen Wertes  $h\vartheta(1+\beta\vartheta)$ , in dem  $\vartheta$  den Temperaturüberschuss des Körpers über die Temperatur der Umgebung,  $h$  und  $\beta$  bez.  $\eta$  von  $\vartheta$  unabhängige Constanten bedeuten. Wenn die Wärmeabgabe durch Strahlung gegen die durch Leitung nur gering ist, so kann einfacher gesetzt werden

$$-\frac{d\vartheta}{dt} = l\vartheta^{\frac{5}{4}}, \text{ woraus folgt } t = \frac{4}{l} (\vartheta^{-\frac{1}{4}} - \vartheta_0^{-\frac{1}{4}}).$$

Die letzte Gleichung genügt zur Berechnung der Beobachtungen vollkommen. Für die Differentialgleichung, welche den bei stationären Temperaturen angestellten Versuchen entspricht, kann daher genommen werden

$$\frac{k}{cd} \frac{d^2u}{dx^2} = l'u^{\frac{5}{4}},$$

worin, wenn  $d$  der Durchmesser und  $L$  die Länge der Stange ist,  $l'$  durch die Proportion bestimmt wird:

$$l':l = 1:\left(1 + \frac{d}{2L}\right).$$

Die Resultate der Controlversuche befinden sich in befriedigender Uebereinstimmung mit den zuerst gewonnenen Resultaten. Dagegen weichen sie von denen ab, welche Tait (Trans. Roy. Soc. of Edinb. 1878. 717) und H. F. Weber (Berl. Ber. 1880. 457-478, siehe F. d. M. XII. 793-794) erhalten haben.

Die Beobachtungen ergeben erstens für die besser leitenden Metalle eine Bestätigung des Gesetzes von Wiedemann und Franz, indem für diese Metalle das Verhältniss der beiden Leitungsvermögen für Wärme und Elektrizität sowohl bei  $0^\circ$  als bei  $100^\circ$  nahezu constant ist. Dagegen wächst dieses Verhältniss für die schlechteren Leiter der Metalle stark mit abnehmendem Leitungsvermögen, wodurch anscheinend der Uebergang zu den





Bei der Abmessung eines Terrains wird dasselbe zuerst durch ein Netz von geraden Linien bedeckt, welche genau aufgenommen werden und in Beziehung auf welche später die Details abgemessen werden. War auf dem Terrain früher eine große Triangulation ausgeführt, so ist es wünschenswert, das Netz für die Detailmessung damit zu verbinden. Eine der Methoden, welche hierbei in Anwendung kommen können, besteht darin, dass man das Netz der niederen Ordnung zu einem selbstständigen Dreiecksnetz ausbildet und dies mit dem Netz der höheren Ordnung dadurch verbindet, dass man in jenem zwei, drei oder mehr Punkte von diesem mit aufnimmt. Je größer die Anzahl von Anschlusspunkten ist, desto complicirter wird die Berechnung; man beschränkt sich deshalb meistens auf den Anschluss dreier Punkte in der Art, dass man die Dreieckspunkte der niederen Ordnung, welche innerhalb des nämlichen Dreiecks der höheren Ordnung liegen, an die drei Winkelpunkte dieses Dreiecks anschliesst. Ueber die Art und Weise dieses Anschlusses wird sodann weiter ausführlich gesprochen und eine neue Methode dafür angegeben. Sie stützt sich auf die Theorie der conformen Abbildung von Oberflächen, wie Gauss dieselbe zuerst in seiner bekannten Abhandlung vollständig entwickelt hat; nach dieser Methode wird ein gegebenes Netz berechnet. Dabei zeigt sich, dass sie genauer ist wie die gebräuchlichere Methode der parallelen Verschiebung. G.

---

H. J. S. SMITH. On a property of a small geodetic triangle on a surface. Brit. Ass. Rep. 1831.

Csy.

---

C. W. BAUR. Verschiebung eines trigonometrischen Netzes. Jordan, Z. f. V. 1881. 402-408.

Der Verfasser entwickelt die Ausdrücke für die Aenderungen der Coordinaten in einem von zwei Fundamentalpunkten aus bestimmten Netze, wenn letztere kleine Aenderungen erfahren.

B.

E. Pucci. Sulla teoria delle basi geodetiche. Batt. G. XIX. 151-156.

Entwickelt den analytischen Ausdruck für den Fehler, welchen man begeht, wenn man bei Basismessungen in der üblichen Weise für die Bogenstücke der geodätischen Linie Bogen von Normalschnitten, resp. von osculirenden Kreisen substituirt.

B.

---

FR. W. REX. Die trigonometrische Punkteinschaltung nach der Methode der kleinsten Quadrate unter Anwendung logarithmischer Differenzen. Jordan, Z. f. V. 1881. 377-386.

Es wird gezeigt, wie man zur Bildung der Coefficienten der Fehlergleichungen die logarithmischen Differenzen, welche bei der Berechnung der Widersprüche vorkommen, unmittelbar benutzen kann.

B.

---

J. SCHLESINGER. Maximalfehler bei Polygonisirungen und ihre Bedeutung in der Vermessungspraxis.

Wien. W. Frick. Centr. f. d. Forstw. 1881.

Von vorwiegend praktischem Interesse; Verfasser entwickelt zur Beurteilung der Genauigkeit von Polygonaufnahmen Vorschriften, bei deren Begründung von dem möglichen Maximalfehler, anstatt von dem zu fürchtenden mittleren Fehler ausgegangen wird.

B.

---

NELL. Schleiermacher's Methode der Winkelausgleichung in einem Dreiecksnetze. Jordan, Z. f. V. 1881. 1-11, 109-121.

Die genannte Methode beruht darauf, dass zunächst durch eine unvollständige Ausgleichung die Widersprüche in den Winkelgleichungen beseitigt werden, wodurch bei der Ausführung der vollständigen Ausgleichung die Anzahl der Normalgleichungen um die Anzahl der Winkelgleichungen vermindert wird. Der







punkten des ganzen Systems und der einzelnen Gruppen, in welche man das System zerlegen kann. § 2 behandelt mit besonderer Rücksicht auf das anallaktische Objectiv für zwei Linsen ausführlich folgende zwei Aufgaben: Gegeben der Abstand zwischen der zweiten Hauptebene der ersten, und der ersten Hauptebene der zweiten Linse, ferner der zweite Brennpunkt des Systems; gesucht eine solche Form des Systems, dass entweder der erste Brennpunkt eine vorgeschriebene Lage, oder die Brennweite einen vorgeschriebenen Wert annimmt. Veranlasst durch die hierbei auftretende Frage nach Constructionen, die auch in Bezug auf die Vergrößerung möglichst vorteilhaft sind, berührt dann Verfasser in § 3 noch den Fall des anallaktischen Objectivs aus mehr als zwei Linsen. B.

---

## Capitel 2.

### A s t r o n o m i e.

A. HALL. Notes on Gauss' Theoria motus. Anal. VIII 83-88.

Erläuternde Notizen zum Gebrauch für Studenten.

Jn. (O.).

---

Y. VILLARCEAU. Note sur les méthodes de Wronski. C. R. XCII. 815-821.

B.

---

W. MATZKA. Zur christlichen Zeitrechnung und für deren Verbesserung. Prag. Abh. (6) X. No. 5.

Die Arbeit bietet mehr Interesse vom Standpunkte der Chronologie als der Mathematik. Sie giebt in ihrem ersten Teil vereinfachte Vorschriften für Berechnungen der Wochentage zu angegebenen Monatstagen, des Wochenordners des Jahres, des

Datums des Osterfestes (mit Hülfe der mittleren synodischen Mondmonate und mit Hülfe der metonischen neunzehnjährigen Mondcyklen). Daran knüpfen sich im fünften Paragraphen Betrachtungen über Festlegung von Ostern. Im zweiten Teile finden sich Betrachtungen und Vorschläge zu einer Verbesserung der Zeitrechnung. O.

---

N. HERZ. Note zur Lösung des Keppler'schen Problems.

Astr. Nachr. No. 2354.

Zur Lösung der Keppler'schen Gleichung wird eine directe Näherungsformel mitgeteilt, welche die sechsten Potenzen der Excentricität berücksichtigt. B.

---

G. SIDLER. Schreiben an den Herausgeber. Astr. Nachr. No. 2361.

Beweis des Satzes von Lehmann-Filhés (cfr. F. d. M. XII. 1880. 861.). B.

---

A. DE GASPARIS. Altre serie fra anomalie e raggio vettore nelle ellissi planetarie. Nap., Rend. XX. 260-264.

---

A. DE GASPARIS. Alcuni teoremi sulle ellisse istantanee planetarie. Nap., Rend. XIX. 1880. 219-227.

---

E. WEISS. Ueber die Berechnung der Differentialquotienten des Radiusvectors und der wahren Anomalie nach der Excentricität in stark excentrischen Bahnen. Wien. Anz. 1881. 47.

Mitteilung der betreffenden Ausdrücke ohne Herleitung. B.

---

O. STONE. On the ratio between sector and triangle in the orbit of a celestial body. *Sylv., Am. J.* III. 326-329.

Herleitung eines einfachen Näherungswertes für das genannte Verhältnis. B.

CH. HERMITE. Extrait d'une lettre à M. Gylden.

*Astr. Nachr.* No. 2402.

Auswertung des elliptischen Integrals

$$\int \frac{dn^4 u}{(sn^2 a - sn^2 u)^3} du.$$

B.

E. WEISS. Ueber eine neue Methode zur Berechnung der wahren Anomalie in stark excentrischen Bahnen.

*Wien. Anz.* 1881. 119-123.

Vorläufige Mitteilung über ein neues Verfahren zur Lösung der genannten Aufgabe, sowie über ein Mittel, die von Gauss für dieselbe Aufgabe in der *Theoria motus* gegebene indirecte Methode in eine directe zu verwandeln. Das Verfahren des Verfassers beruht (in der Bezeichnung der *Th. motus*) auf folgendem Gedankengang: Es werden die Hilfsgrößen  $V$  und  $V_0$  durch die Relationen

$$\operatorname{tg} \frac{V}{2} = \sqrt{\frac{3e-1}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{v}{2}, \quad \frac{kt\sqrt{3e-1}}{2q^{\frac{1}{2}}} = \operatorname{tg} \frac{V_0}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{V_0^3}{2}$$

bestimmt und die Reduction von  $V_0$  auf  $V$  durch Reihenentwicklungen dargestellt, deren Coefficienten Potenzen von  $1-e$  enthalten. B.

R. RADAU. Travaux concernant le problème des trois corps et la théorie des perturbations. *Darb. Bull.* (2) V. 270-295.

Siehe Abschn. X. Cap. 4. A. p. 696.

O.





A. DE GASPARIS. Ulteriore uso ed estensione della formola pel calcolo delle perturbazioni. Nap., Rend. XIX. 1880. 95-99.

---

A. DE GASPARIS. Serie per il moto perturbato, compresi i termini fino alle settime potenze del tempo. Nap., Rend. XX. 134-142, 151-159.

---

G. W. HILL. Note on Hansen's general formulae for perturbations. Sylv., Am. J. IV. 256-259.

Die letzte Form, in der Hansen (Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten; Leipz. Abh. III.) die Störungen ausdrückte, war folgende:

$$n_0 z = n_0 t + c_0 + \int \left\{ \bar{W} + \frac{h_0}{h} \left( \frac{\nu}{1+\nu} \right)^2 \right\} n_0 dt,$$

$$\nu = C - \frac{1}{2} \int \left( \frac{d\bar{W}}{dz} \right) dt.$$

Herr Hill giebt der Gleichung zur Bestimmung des  $\nu$  die für die Berechnung vorteilhaftere Form:

$$\nu = -\frac{1}{6}(X_0 + PX_1) - \frac{1}{2} \left( (1+\nu)^2 \frac{d \cdot \delta \nu}{dt} + \nu^2 \right) + \frac{\left( (1+\nu)^2 \frac{d\delta z}{dt} + 2\nu + \nu^2 \right)^2}{3(1+\nu)^2 \left( 1 + \frac{d \cdot \delta z}{dt} \right)}.$$

M.

---

O. CALLANDREAU. Remarques sur le calcul des perturbations relatives d'après la méthode de M. Gylden. C. R. XCIII. 201-204.

Die Bemerkungen beziehen sich wesentlich auf die rechnerische Praxis.

---

B.







Vorläufige Mitteilung über neue Störungsformeln, deren wesentlicher Unterschied von den bisherigen darin besteht, dass als erste Approximation nicht eine Kepler'sche Ellipse, sondern eine complicirtere Curve zu Grunde gelegt wird, welche dadurch entsteht, dass bei der ersten Approximation schon gewisse Glieder der Störungsfunction mit hinzugezogen werden.

B.

H. GYLDÉN. Sur la théorie du mouvement des corps célestes. C. R. XCII. 1262-1265.

Vorläufige Mitteilung über die neuen Störungsformeln des Verfassers, bezüglich deren das Referat nach Erscheinen der angekündigten grösseren Abhandlung zu geben ist.

B.

A. D'ABBADIE. Les desiderata de l'astronomie. Brux., Ann. S. Sc. V. B. 123-138.

Für die theoretische Astronomie handelt es sich darum, ob die Einführung elliptischer Functionen nicht den Einfluss der Glieder, welche man jetzt in den Reihenentwickelungen vernachlässigt, besser erkennen lassen würde. Für die astronomischen Rechnungen muss die Decimaltheilung eingeführt werden, da sie, wie die Erfahrung lehrt, die Rechnungen abkürzt. So hat Herr Airy alle vor ihm gemachten Mondbeobachtungen in Decimaltheilung transformirt, bevor er sie reducirte. Die ersten Berechnungen einer Beobachtung müssen ferner sofort und durch den Beobachter selbst gemacht werden, um die groben Beobachtungsfehler entdecken und die aus den Beobachtungen gezogenen oft unerwarteten Folgerungen verificiren zu können. In Folge der Unterlassung dieser Vorsicht hat Lemonnier den Uranus und Lalande den Neptun beobachtet ohne es zu ahnen. Giebt man ein Mittel, so muss man gleichzeitig die grössten Abweichungen geben und den wahrscheinlichen Fehler, vorausgesetzt dass die Zahl der Beobachtungen die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate gestattet. Schliesslich macht der Verfasser darauf aufmerksam,

dass es eine Fülle von Beobachtungen giebt, mit denen sich die grossen Observatorien nicht belasten können, und die man doch ohne grosse Kosten machen könnte.

Mn. (O.).

---

D. KIRKWOOD. On the limit of planetary stability.

Anal. VIII. 1-3.

Angenäherte numerische Schätzungen der Entfernungen, in welchen die störende Kraft des Centralkörpers gleich ist der Attractionskraft der Planeten für den Fall des Sonnensystems und einiger Planetensysteme.

Jn. (O.).

---

A. MORTH. On the determination of the moon's libration.

Month. Not. XLI. 420-431.

In der Methode, welche bei einer Reihe von Untersuchungen über die Libration des Mondes befolgt worden ist, wurde die scheinbare Lage eines Fleckens, bezogen auf den Mittelpunkt der Mondscheibe und den Declinationskreis, hergeleitet aus den gemessenen Entfernungen und Positionswinkeln von Punkten der Mondränder in Beziehung auf den Punkt. Aus diesen scheinbaren Coordinaten wurden dann die selenocentrische Rectascension und Declination hergeleitet und diese in die ekliptische Länge und Breite umgewandelt. Dann wurden die Resultate verglichen mit der selenocentrischen Länge und Breite, die aus angenäherten Werten der selenographischen Coordinaten des Fleckes und der Neigung des Mondäquators gegen die Ekliptik berechnet waren. So ergaben sich Gleichungen, welche die Wirkung der Correctionen aus diesen Werten und Glieder darstellen, welche von der physischen Libration herrühren.

Der Verfasser befolgt einen anderen Weg. Er geht von angenommenen selenographischen Coordinaten des Fleckes über zu seinen scheinbaren Coordinaten, bezogen auf die Mondscheibe und die Richtung der Mondaxe, um die Correctionen dieser Coordinaten zu bestimmen, welche den Messungen am besten genü-



Resultat zu geben, welches mit dem Werte der von Hansen gegebenen Formel identisch ist. Herr Airy. giebt einige Ergänzungen zu der Adams'schen Arbeit. Glr. (O.).

---

M. W. MEYER. Bahnbestimmung der Satelliten des Saturn, Enceladus, Thetis, Dione und Rhea nach einer neuen Methode. Astr. Nachr. No. 2375.

Verfasser teilt die Formeln mit, nach denen er die elliptischen Elemente der genannten Saturns-Satelliten aus eigenen Beobachtungen abgeleitet hat. B.

---

A. HALL. The secular displacement of the orbit of a satellite. Anal. VIII. 177-187.

Es werden die Störungen untersucht, die von der Wirkung der Sonne und der sphäroidischen Form herrühren und numerische Resultate für die Satelliten von Saturn und Mars mitgeteilt. Jn. (O.).

---

A. DE GASPARIS. Sopra una nuova formola pel calcolo delle orbite delle stelle doppie. Rom., Acc. L. (3) V. 133-134. B.

---

H. HENNESSY. On the figures of the planets. Phil. Mag. 1881.

Die Arbeit beschäftigt sich damit, zu zeigen, dass bei den inneren Planeten Mars, Venus, Merkur und Erde die Abplattung an den Polen mit grösserer Wahrscheinlichkeit auf ihren ursprünglich flüssigen Zustand als auf Erosion zurückzuführen ist. Die Formel für die Abplattung aus letzterem Grunde wäre

$$e = \frac{5}{2} Q \left( \frac{D}{5D - 3D'} \right),$$

wo  $Q$  das Verhältniss der Centrifugalkraft zur Schwere am Aequa-



A. SPRUNG. Ueber die Bahnlilien eines freien Teilchens auf der rotirenden Erdoberfläche und deren Bedeutung für die Meteorologie. Wiedemann Ann. (2) XIV. 128-149.

Behandelt die Bahn eines Teilchens, welches sich unter dem Einflusse der Erdanziehung auf der rotirenden Erdoberfläche ohne Reibung bewegt, und bespricht die Folgerungen, welche sich daraus für die Deutung meteorologischer Vorgänge ziehen lassen. B.

W. D. NIVEN. On a special form of Laplace's equation. Mess. (2) X. 114-117.

Die Form der Gleichung ist:

$$\frac{d}{d\varrho} (c + e^{\varrho} \cos \theta) \frac{dV}{d\varrho} + \frac{d}{d\theta} (c + e^{\varrho} \cos \theta) \frac{dV}{d\theta} = 0,$$

wo

$x = (c + r \cos \theta) \cos \varphi$ ,  $y = (c + r \cos \theta) \sin \varphi$ ,  $z = r \sin \theta$ ,  $\varrho = \log r$ . Dabei wird vorausgesetzt, dass  $V$  für alle Längen denselben Wert hat. Von dieser Gleichung werden zwei specielle Lösungen gegeben:

$$(1) \quad V = \frac{A \sin \frac{1}{2} (\psi + \alpha)}{\sqrt{rr'}}.$$

Dabei ist  $r'$  die Entfernung eines Punktes  $P$  von dem  $\theta$  gegenüberliegenden Schnittpunkt des Kreises in derselben Längenebene  $\varphi$ .  $\psi$  bezeichnet den Winkel zwischen  $r$  und  $r'$ ,  $\alpha$  ist constant.

$$(2) \quad V = \frac{2c}{\sqrt{rr'}} \left\{ \cos \frac{1}{2} \psi \log \frac{R}{\sqrt{2c}} - \sin \frac{1}{2} \psi \cdot \chi \right\}$$

und

$$= \frac{2c}{\sqrt{rr'}} \left\{ \sin \frac{1}{2} \psi \log \frac{R}{\sqrt{2c}} + \cos \frac{1}{2} \psi \cdot \chi \right\},$$

wo

$$R^2 = r + r' + 2\sqrt{rr'} \cos \frac{1}{2} \psi \quad \text{und} \quad \tan \chi = \frac{r - r' + 2c}{-r + r' + 2c}.$$

Glr. (O.).







Formelentwickelungen, bezüglich deren auf die betreffenden Aufsätze zu verweisen ist. B.

---

D. P. TODD. Observations of the transit of Mercury, 1878, May 5-6 including a systematic search for a satellite and measures of the diameter of the planet. Amer. Ass., Proc. XXVIII. 74-77.

D. P. TODD. Preliminary account of a speculation and practical search for a transneptunian planet. Am. J. Sc. XX. 225-234.

D. P. TODD. Solar parallax from the velocity of light. Am. J. Sc. XIX. 59-64.

D. P. TODD. The Solar parallax as derived from the American photographs of the transit of Venus 1874, December 8-9. Am. J. Sc. XXI. 491-493.

D. P. TODD. Report on the total Solar eclipse of 1878. July 29. Washington Observ. 1876. App. III. Washington 1880.

B.

---

H. SEELIGER. Ueber die Häufigkeit der Fixsternbedeckungen durch einen Planeten. Astr. Nachr. No. 2388, No. 2398.

Unter der Voraussetzung, dass Planet und Erde sich in Kreisbahnen in der Ekliptik bewegen, wird der auf elliptische Integrale führende Ausdruck für den Inhalt des Flächenstreifens hergeleitet, welcher in einer bestimmten Zeit von der Planetenscheibe am Himmel überstrichen wird. Diese Grösse liefert dann unter Annahme einer gleichförmigen Verteilung der Sterne sofort die gesuchte durchschnittliche Häufigkeit.

B.

---

H. BRUNS. Bemerkungen über den Lichtwechsel der Sterne vom Algoltypus. Berl. Monatsber. 1881. 48-60.

Veranlasst durch den Versuch von Herrn Pickering, den Lichtwechsel des Algol durch einen umlaufenden dunklen Begleiter zu erklären, stellt sich Verfasser die Aufgabe, zu untersuchen, ob und wie weit es möglich ist, einen stetigen und regelmässig periodischen Lichtwechsel veränderlicher Sterne durch ungleiche Helligkeit an verschiedenen Stellen der Oberfläche in Verbindung mit einer Rotation um eine feste Axe zu erklären. Wird der Stern als sphärisch vorausgesetzt, und ist die Leuchtkraft für den Punkt mit der Poldistanz  $\beta$  und der Länge  $\lambda$  durch die Kugelfunctionenreihe

$$h(\beta, \lambda) = \sum_{m,n} A_{m,n} P(m, n, \beta) e^{in\lambda}$$

gegeben, wo

$$P(m, n, \beta) = \frac{1}{2^m} \frac{(i \sin \beta)^n}{(m+n)!} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} (x^2 - 1)^m, \quad \text{wo } x = \cos \beta,$$

so wird die scheinbare Helligkeit

$$H = 2\pi \sum_{m,n} A_{m,n} P\left(m, n, \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) e^{-nit} K_m,$$

wo

$$K_m = \int_0^{\frac{\pi}{2} + \delta} F(\gamma) P_m(\cos \gamma) \sin \gamma d\gamma.$$

Hierbei ist die Rotationsdauer gleich  $2\pi$ ;  $t$  ist die Zeit,  $\frac{\pi}{2} + \varepsilon$  die Poldistanz der Richtung nach der Erde,  $F(\gamma)$  eine von dem Emissionsgesetz und der Beschaffenheit einer etwaigen Atmosphäre abhängige Function,  $\delta$  die Horizontalrefraction für den Stern. Es wird dann gezeigt, dass es immer möglich ist, durch passende Annahmen über die Functionen  $h$  und  $F$ , sowie über die Grössen  $\varepsilon$  und  $\delta$  zwischen der entsprechenden Function  $H$  und einer beobachteten Helligkeitscurve Uebereinstimmung mit einem beliebigen Grade von Genauigkeit zu erreichen. B.

---

R. LEHMANN-FILHÉS. Ueber die mutmassliche Verteilung der Radiationspunkte. Astr. Nachr. No. 2405.



welche von der Beschaffenheit des Kreises selbst herrühren, wobei die Bessel'sche Methode, Theilungen zu untersuchen, ausführlicher discutirt wird. B.

---

J. A. C. OUDEMANS. Ueber die Compensation eines Secundenpendels für Temperatur und Luftdruck vermittels eines Quecksilbercylinders und eines Krüger'schen Manometers. Astr. Nachr. No. 2378-2380.

Der Aufsatz enthält eine vollständige Theorie des mit einem Manometer versehenen Quecksilberpendels und entwickelt in ausführlicher Weise die Vorschriften, welche zur Berechnung eines solchen Pendels erforderlich sind. B.

---

# Anhang.

---

O. SCHLÖMILCH. Handbuch der Mathematik. Breslau.  
Trewendt.

Laut Erklärung des Herausgebers (Grunert Arch. LXX. ist kein Teil des Buchs von ihm selbst bearbeitet; vielmehr sind die auf dem Titel als Mitwirkende genannten Dr. Reidt und Prof. Dr. Heger ausschliesslich die Verfasser. Ersterer hat die Arithmetik und Algebra (einschliesslich Combinatorik, Reihen und Determinanten), ferner Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie verfasst. Die von Letzterem bearbeiteten Abschnitte sind betitelt: Darstellende Geometrie, analytische Geometrie, Differential- und Integralrechnung, Gleichungsrechnung, Renten- etc. Versicherung. Die Bezeichnung als analytische Geometrie ist nicht zutreffend; denn gemäss der Erklärung, welche dieser Geometrie ausdrücklich eine synthetische Aufgabe zuweist, und gemäss der Ausführung, welche sich in synthetischem Fortschritt nur auf Curven und Flächen zweiten und dritten Grades erstreckt, die Existenz einer allgemeinen Theorie der Curven und Flächen hingegen gänzlich ignorirt, ist jener Abschnitt nur eine Coordinatenlehre mit der genannten Anwendung in synthetischer Behandlung.

---

H.

H. HEILERMANN u. J. DIEKMANN. Lehr- und Uebungsbuch für den Unterricht in der Algebra an Gymnasien, Real- und Gewerbeschulen. I. Teil. 2<sup>te</sup> vermehrte Auflage. Essen. G. D. Bädcker.

Der vorliegende erste Teil dieses Lehrbuches, dessen erste Auflage 1878 erschienen, ist für die Klassen Quarta und Tertia bestimmt und umfasst die vier Grundoperationen und die linearen Gleichungen. Auf die in klarer Form ausgesprochenen Begriffe und Lehrsätze folgt in jedem Paragraphen eine Anzahl von Uebungsbeispielen. Die Division schliesst mit der Theorie der Decimalbrüche und den Elementen der Theorie der Teilbarkeit der Zahlen. Die Theorie der linearen Gleichungen enthält die Elemente der Determinanten. An verschiedenen Stellen sind knappe, für Schüler wohl ausreichende historische Notizen in Anmerkungen beigelegt. M.

---

K. SCHMEISSER. Die Analysis für Jünger und Freunde der Mathematik. Querfurt, im Verlage des Verfassers.

Der Herr Verfasser versteht unter „Analysis“ einige abgerissene Sätze über Gleichungen, besonders solche ersten und zweiten Grades, über die binomische, die logarithmische, die Exponentialreihe, über Reihen für sinus und cosinus, über höhere arithmetische Reihen und Interpolation. Die Beispiele, welche diesen Notizen beigelegt werden, sind wertvoller als die Darstellung, welche ganz unwissenschaftlich ist. M.

---

F. RUMMER. Lehrbuch der Buchstabenrechnung und der Gleichungen. Mit einer Sammlung von Aufgaben. I. Heidelberg. Winter. No.

---

E. SUCHSLAND. Systematische Entwicklung der gesamten Algebra. I. Die vier Species. Pr. Stolp. No.

---





Theorie und Praxis des logarithmischen Rechnens den betreffenden Kreisen mundgerecht zu machen bestrebt ist.

Std.

---

A. WEILER. Leitfaden der mathematischen Geographie für den Unterricht an Mittelschulen, sowie zum Selbststudium. Leipzig. Teubner.

B.

---

F. J. STUDNIČKA. Ueber zusammengesetzte Proportionen. Cas. X. 182. (Böhmisch).

Enthält eine Ergänzung zu des Verfassers Lehrbuch der Algebra in Betreff der Proportion

$$\frac{a}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \dots = \frac{x_n}{b} = \frac{1}{m},$$

wobei unter Verwendung der Grösse

$$m = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$$

die Lösung abgeleitet erscheint:

$$x_k = m^k a.$$

Std.

---

M. RUSCH. Ueber das Kubiren und Kubikwurzelausziehen nach Horner's Methode. Hoppe Arch. LXVII. 291-312.

Auseinandersetzung der Methode zum Zweck der Einführung derselben in den elementaren Unterricht.

No.

---

E. SANG. On equidistant multiples of irrational quantities. Edinb., Proc. X. 2-5.

Enthält praktische Methoden zur Abkürzung der Berechnung bei Reihen von Vielfachen einer gegebenen irrationalen Grösse, so dass man Resultate erhält, die auf eine gegebene Zahl von Decimalstellen correct sind.

Cly. (O.).

---

A. J. ELLIS. Postscript to the chronological summary of method of computing logarithms in my paper on the potential radix. Lond., R. S., Proc. XXXII 377-379.

Cly.

A. J. ELLIS. On an improved bimodular method of calculating natural and tabular logarithms and anti-logarithms to twelve or sixteen places with very brief tables. Lond., R. S., Proc. XXXI 3-1-35.

Bimodulus ist eine Constante, welche der doppelte Modul eines Logarithmen-Systems ist. Die Bimodular-Methode wird aus dem bekannten Satz, hergeleitet, dass, wenn die Differenz zweier Zahlen klein ist, die Differenz ihrer Logarithmen nahezu gleich dem Bimodulus, multiplicirt mit der Differenz und dividirt durch die Summe der Zahlen selbst, ist. Die Verbesserung besteht in der Vorausschickung einer Vorbereitung, welche die Methode allgemein anwendbar macht, in Verbindung mit einer leichten Correction, welche auf der Transformation einer bekannten Reihe beruht, die nach ganzen Potenzen des Quotienten aus der Differenz durch die Summe der Zahlen fortschreitet, wobei die Zahl der Stellen sehr schnell wächst. Angewandt wird die Methode auf die Berechnung des natürlichen und künstlichen Logarithmus einer Zahl auf zwölf Stellen mit Hülfe einer Tafel von zwei Seiten für jede Art der Logarithmen, und auf sechzehn Stellen mit Hülfe einer siebenstelligen Tafel Briggscher Logarithmen. Eine äusserst einfache Regel, welche der Verfasser für neu hält, gestattet den Uebergang vom Logarithmus zum Numerus.

Cly. (O.).

A. J. ELLIS. On the potential radix as a means of calculating logarithms to any required number of decimal places with a summary of all preceding methods chronologically arranged. Lond., R. S., Proc. XXXI. 398-413, XXXII. 377-379.

Bespricht die Vorzüge der Bimodularmethode. Die chronologische Uebersicht bespricht Werke der Bibliothek der Royal Society in London über den Gegenstand. Cly. (O.).

H. P. Udkast til Antilogarithmetabel til Beregning af Logarithmer og Antilogarithmer med indtil 8 cifre.  
Kjöbenhavn. G. E. C. Gad.

Von den acht Octavseiten dieser kleinen Arbeit enthält die vierte eine achtstellige Antilogarithmentafel der dreiziffrigen Zahlen, nebst ein Paar Hilfsgrössen. Die Tafel beruht auf einem sehr hübschen und, soweit dem Referenten bekannt ist, neuen Gedanken. Während nämlich das gewöhnliche Verfahren zur Berechnung vielstelliger Logarithmen auf die Auflösung einer Zahl in Factoren von der Form  $1,00... \alpha\beta\gamma...$ , wo die Ziffern  $\alpha\beta\gamma...$ , die nicht Null sind, nur in kleiner Anzahl (1 oder 3) vorhanden sind, hinausläuft, so kommt es hier darauf an, dass  $\alpha\beta\gamma...$  eine Zahl bedeutet, deren Logarithmus eine Mantisse hat, für welche nur die zwei ersten Stellen von Null verschieden sind. Mittels zweier Hülfscolonnen, welche gewisse Logarithmen von den Formen  $\log\left(1 + \frac{1}{a}\right)$  und  $\log\left(1 + \frac{1}{10a}\right)$  enthalten, ist es dann möglich, achtziffrige Logarithmen und Antilogarithmen mittels weniger Aufschläge in der Tafel und mittels einfacher Additionen zu berechnen. Interpolationen sind sogar überflüssig, und die ganze Rechnung scheint in der Tat auf ein Minimum reducirt zu sein. Die vorliegende Tafel ist eigentlich nur eine Probe, das Princip lässt sich aber wohl auf grosse Tafeln anwenden.

Gm.

C. BRUHNS. Neues logarithmisch-trigonometrisches Handbuch mit sieben Decimalen. Zweite Stereotyp-Ausgabe.  
Leipzig. Tauchnitz.

Neue Ausgabe der bereits bekannten Tafel. Die sechs Fehler, welche sich im Laufe der Zeit in der ersten Ausgabe



M. W. CROFTON. On symbols of operation. Sylv., Am. J. IV. 269-271.

Zunächst wird bewiesen, dass, wenn  $\varphi$  eine Function  $D$ , d. h.  $\frac{d}{dx}$  ist,

$$e^{x\varphi(D)}e^{hx} = e^{\lambda x},$$

wo  $\lambda$  eine durch die Gleichung

$$\psi(\lambda) = 1 + \varphi(h)$$

bestimmte Constante ist und die Function  $\psi$  definirt wird durch:

$$\psi(x) = \int \frac{dx}{\varphi(x)}.$$

Ferner wird durch Vergleichung von Lagrange's Theorem mit einem von Herrn Crofton (Lond., M. S. XII. 122, s. diesen Band p. 212) gefundenen Resultat eine bemerkenswerte Identität zwischen gewissen symbolischen Operationen hergeleitet. M.

A. CAYLEY. On the analytical forms called trees.

Sylv., Am. J. IV. 266-268.

Eine Vereinfachung der Resultate, welche Herr Cayley in den früheren Arbeiten: „On the theory of the analytical forms called trees“, Phil. Mag. XIII. 1857. p. 172-176 und „On the analytical forms called trees, with applications to the theory of chemical combinations“, Rep. Brit. Ass. 1875, 257-305, veröffentlicht hat. Sie betreffen die Anzahl der Wurzelbäume (root-trees) mit  $N$  Aesten (knots) und die Anzahl der besonderen Bäume mit  $N$  Aesten. Wegen der Terminologie muss auf die genannten Abhandlungen verwiesen werden. M.

G. M. SCHULTZKY. Das Quadrat der Bildung. Berlin.

Th. Grieben.

Dem Mathematiker diene zur Mitteilung, dass das 382 Seiten lange Werk Schultzky's, trotzdem es sich den Titel mathematisch-philosophische Erwägungen beilegt, nichts Mathematisches enthält. Vielmehr zeigt der Verfasser an den Stellen, wo die Be-

trachtung sich mathematischer Worte und Formeln bedient, z. B. bei der Berechnung des Bildungsverlaufes Unkenntnis des Zweckes und der Grenzen mathematischer Betrachtungen, und das 16. Capitel, wo der Verfasser es unternimmt, das kopernikanische System zu vervollständigen und zu erweitern, muss geradezu als Hohn auf die mathematische Methode betrachtet werden. Der Verfasser findet unter anderem, dass sich um seine Axe drehen in der Entwicklung der Himmelskörper zum Selbstbewusstsein kommen heisst, dass die Polneigung nichts anderes als ein Pendelschwingung des Sterns ist, dass sich in der Atmosphäre das im Himmelskörper vorhandene Selbstvermögen ausspricht, dass die Atmosphäre das Zukunftsbild des Sternes ist, dass schliesslich jeder Himmelskörper zu Atmosphäre, Wärme, Licht werden muss, dass die Kometen die vollendetsten Himmelskörper sind, dass der Himmelskörper sich im letzten Stadium seiner Entwicklung selbst opfert u. s. w. Dabei glaubt der Verfasser, dass seine Theorie auf begründeten Widerspruch nicht stossen werde. Mi.

---

W. C. WITTWER. Grundzüge der mathematischen Chemie.  
Schlömilch Z. XXVI. 337-356.

Diese Mitteilung enthält die Fortsetzung der vorjährigen (Schlömilch Z. XXV. 353-374, siehe F. d. M. XII. 1880. 872-873) und zwar die zweite specielle Betrachtung, welche sich auf den Sauerstoff und dessen Verbindungen mit dem Wasserstoff bezieht. Auf den letzten elf Seiten wird das Eis berücksichtigt.

Rs.

---

## Namenregister.

---

	Seite
<b>Abbadie, A. d'</b> Les desiderata de l'astronomie . . . . .	848
<b>Abdank-Abakanowicz, B.</b> Sur un intégrateur . . . . .	227
<b>Abel, N. H.</b> Oeuvres complètes . . . . .	20
<b>Abonné.</b> Nécrologie . . . . .	24
<b>Adams, J. C.</b> On inequality in the moon's latitude . . . . .	850
<b>Adan, E.</b> Latitude en voyage . . . . .	855
<b>Adresse der Berliner Akademie für E. E. Kummer</b> . . . . .	24
<b>Ahlborn, H.</b> Ueber Berechnung von Summen von grössten Ganzen	141
<b>Airy, G. B.</b> 1) A systematic interruption in the order of numerical values of vulgar fractions . . . . .	142
2) Effect on the moon's movement in latitude produced by the slow change of position of the plane of the ecliptic . . . . .	850
<b>Alexéeff.</b> Sur l'intégration des équations partielles du premier ordre . . . . .	294
<b>Allman, G. J.</b> Greek geometry . . . . .	1
<b>Ameseder, A.</b> 1) Constructionen ebener Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten . . . . .	481
2) Ein Nullsystem zweiten Grades . . . . .	495
3) Ueber die eine rationale Plancurve vierter Ordnung vierfach be- rührenden Kegelschnitte . . . . .	549
<b>Amoroso, N.</b> Un teorema di meccanica . . . . .	701
<b>Amsler, A.</b> Ueber den Flächeninhalt und das Volumen durch Be- wegung erzeugter Curven und Flächen . . . . .	668
<b>Anderson, A.</b> Solutions of questions . . . . . 541. 545. 622.	715
<b>André, D.</b> 1) Sur les permutations alternées . . . . .	152
2) Solution d'un problème général sur les séries . . . . .	173
3) Intégration, sous forme finie, d'une nouvelle espèce d'équations différentielles . . . . .	244
<b>Anonym.</b> 1) Extraits du traité de géométrie de Cl. Mydorge . . .	13
2) Beiträge zur Geschichte der mathematischen Gesellschaft in Hamburg . . . . .	18
3) Cenno necrologico ed elenco delle pubblicazioni del G. Bellavitis	23
<b>Appell, P.</b> 1) Sur une classe d'équations différentielles linéaires .	252
2) Sur des équations différentielles linéaires dont les intégrales vérifient des relations d'une certaine forme . . . . .	253
3) Mémoire sur les équations différentielles linéaires . . . . .	254







	Seite
Bois-Reymond, P. du 2) Ueber Darstellungsfunktionen . . . . .	327
Boltzmann, L. 1) Experimente über den Stoss von Cylindern . .	740
2) Entwicklung einiger Formeln . . . . .	800
3) Zur Theorie der Gasreibung . . . . .	819
4) Das Wärmegleichgewicht betreffende Sätze . . . . .	820
Boncompagni, B. 1) Intorno ad uno scritto inedito di Adelardo di Bath . . . . .	7
2) Testamento inedito di N. Tartaglia . . . . .	10
3) M. Chasles . . . . .	23
4) Presentazione di due brani di lettere . . . . .	134
Bonsdorff. Ueber einen neuen Connex im Raume . . . . .	649
Borchardt, C. W. Sur deux algorithmes analogues à celui de la moyenne arithmético-géométrique de deux éléments . . . . .	370
Boschi, P. Alcune proprietà delle forme geometriche fondamentali collineari di seconda e di terza specie . . . . .	460
Bottiglia. Teoria e calcolo delle molle metalliche . . . . .	741
Boudènes, J. Solutions de questions . . . . .	542. 545
Bourguet, L. 1) Développement en séries des intégrales eulériennes	218
2) Sur les intégrales eulériennes . . . . .	219
3) Sur la détermination des maxima et minima de la fonction $\Gamma(x)$	219
Boussinesq, J. 1) Sur la théorie des séries trigonométriques les plus usuelles . . . . .	182
2) Sur une formule générale propre à justifier synthétiquement l'emploi des divers développements de fonctions arbitraires . .	336
3) Comment se transmet dans un solide isotrope la pression exercée sur une très petite partie de sa surface . . . . .	737
4) Égalité des abaisséments moyens sur un sol horizontal . . . .	738
Bouty, E. Équations fondamentales du magnétisme induit . . . .	798
Boys, C. V. An integrating machine . . . . .	217
Brassinne, E. 1) Détermination des trois axes d'un corps . . . .	710
2) Sur les trois axes centrifuges . . . . .	710
3) Sur les axes centrifuges . . . . .	710
Bremiker, C. Logarithmisch-trigonometrische Tafeln . . . . .	866
Bresse. Rapport sur un mémoire de M. Périssé . . . . .	742
Brill, A. Algebraische Raumcurven, welche die Gestalt einer Schlinge haben . . . . .	600
Brill, L. Catalog mathematischer Modelle . . . . .	623
Brillouin, M. Intégration des équations différentielles auxquelles conduit l'étude des phénomènes d'induction . . . . .	772
Brioschi, F. 1) M. Chasles . . . . .	23
2) Il risultante di due forme binarie . . . . .	102
3) Sopra una forma binaria dell' ottavo ordine . . . . .	103
4) Théorèmes relatifs à l'équation de Lamé . . . . .	257
5) Sur la théorie des équations différentielles du second ordre . .	259
6) Sulle equazioni differenziali del tetraedro, dell' ottaedro e dell' icosaedro . . . . .	263
7) Sopra un sistema di equazioni differenziali . . . . .	289
8) Sur un système d'équations différentielles . . . . .	290
9) La relazione di Göpel per funzioni iperellittiche . . . . .	371
10) Sur une propriété du paramètre de la transformée canonique des formes cubiques ternaires . . . . .	533
11) Sur la surface de Kummer à seize points singuliers . . . . .	629
Briot, F. Résolution de l'équation du quatrième degré . . . . .	80
Bruhns, C. Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch . . . . .	865
Brunel, G. E. A. Sur les propriétés métriques des courbes gauches dans un espace linéaire à $n$ dimensions . . . . .	586
Bruno, Faà de 1) Einleitung in die Theorie der binären Formen .	86









	Seite
Euler, L. Considération sur quelques formules intégrales . . . . .	18
Evans. Solutions of questions . . . . . 168. 444. 560.	622
Exner, K. E. Verdet's Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes . . . . .	746
Fabian, O. Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten . . . .	679
Faifofer, A. Lejeune-Dirichlet's Zahlentheorie . . . . .	132
Falk, M. En anmärkning om partiella differentialeqvationer . . . .	303
Farkas, J. Sur le développement des intégrales elliptiques de pre- mière et de seconde espèce en séries récurrentes . . . . .	355
Fauquembergue, H. 1) Solutions de questions . . 224. 577. 622.	686
2) Question 583 . . . . .	527
3) Questions de licence . . . . . 527. 626.	712
Faure, H. Sur l'expression du volume de certains tétraèdres . . . .	453
Favaro, A. 1) Intorno al testamento inedito di Tartaglia . . . .	11
2) I precursori inglesi del Newton . . . . .	12
3) G. Galilei e lo studio di Bologna . . . . .	14
4) La proposta della longitudine fatta da Galilei . . . . .	15
5) Inedita Galileiana . . . . .	15
6) Justus Bellavitis . . . . .	23
7) Sulla biblioteca matematica italiana del prof. P. Riccardi . . . .	25
Faye. Propriété de l'indicatrice relative à la courbure moyenne des surfaces convexes . . . . .	573
Fergola, E. Berichte über Arbeiten von E. Caporali, N. Salvatore- Dino, D. Padelletti . . . . . 617. 644. 675.	681
Ferraris, G. Sui cannocchiali con obiettivo composto di più lenti a distanza le une dalle altre . . . . .	839
Ferrers, N. M. 1) Property of a quadric curve with three double points . . . . .	534
2) On the distribution of electricity on a bowl . . . . .	782
Feussner, W. Ueber die Interferenz - Erscheinungen dünner Blättchen . . . . .	762
Fialkowski, N. 1) Lehrbuch der Geometrie . . . . .	455
2) Geometrische Flächenornamente . . . . .	455
3) Die Kegelschnittlinien aus dem Schatten eines Kreises . . . .	458
Finger, J. Beziehungen der homogenen Deformationen fester Kör- per zur Reactionsfläche . . . . .	733
Fischer, F. Die mathematischen Grundlagen der Militärdienst- versicherung . . . . .	163
Fischer, F. W. Erweiterung des Satzes von der Sichel des Archi- medes . . . . .	447
Floquet, G. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques . . . . .	256
Förster. Beziehung zwischen der Vergrößerung der Mikroskope und der Genauigkeit der mikrometrischen Messungen . . . . .	767
Folie, F. 1) Histoire de l'astronomie en Belgique . . . . .	45
2) Rapports sur des mémoires de MM. C. Le Paige et G. A. Hirn 94. 98.	812
3) Sur les courbes du troisième ordre . . . . .	598
4) Sur la cause probable des variations de latitude et du magné- tisme terrestre . . . . .	839
5) A propos de la détermination de la latitude . . . . .	855
Forchhammer, G. Prüfer paa Geometrie med fire Dimensioner .	424
Forest, E. L. de 1) Law of facility of errors in two dimensions .	160
2) On the elementary theory of errors . . . . .	160
Forestier. Sur l'équation au carré des différences . . . . .	71
Formenti. Riduzione di integrali di funzioni algebriche . . . . .	347









	Seite
Hall, A. 2) The secular displacement of the orbit of a satellite . . .	851
Halphén, G. 1) Sur une série d'Abel . . . . .	180
2) Sur une classe d'équations différentielles linéaires . . . . .	264
3) Sur des fonctions qui proviennent de l'équation de Gauss . . .	266
4) Sur un système d'équations différentielles . . . . .	289
5) Sur certains systèmes d'équations différentielles . . . . .	290
6) Sur certaines séries pour le développement des fonctions d'une variable . . . . .	331. 332
7) Sur un critérium de Steiner à la théorie des sections coniques	539
8) Problème concernant des courbes planes du troisième ordre .	546
Halsted, B. On mensuration . . . . .	866
Haluschka, F. Zur Theorie der Maxima und Minima von Func- tionen . . . . .	210
Hamburg, F. F. Kritische Untersuchung über Militärdienstver- sicherung . . . . .	163
Hamilton, W. R. Elemente der Quaternionen . . . . .	524
Hammond, J. Solutions of questions . 198. 215. 224. 281. 559. 560.	686
Handrick, A. Aufgaben aus der sphärischen Astronomie . . . . .	855
Hansen, P. C. V. Om Integration af Differentialligningen $f\left(\frac{du}{dz}, u\right) = 0$ . . . . .	230
Hansted, B. 1) Nogle Bemærkninger om Bestemmelsen af Koeffi- cienterne i $m^{te}$ Potens af en Potensrække . . . . .	173
2) Nogle Transformationer af den lineære Differentialligning . . .	275
Harkema, C. Solution d'une question . . . . .	142
Harley, R. 1) Solution of a question . . . . .	55
2) Supplementary notes on a differential equation . . . . .	284. 285
Harmuth, Th. 1) Darstellbarkeit der Primzahlen durch die Form $a^2 + b^2$ . . . . .	135
2) Zum Beweise eines Satzes . . . . .	135
3) Magische Quadrate . . . . .	145
4) Magische Rechtecke . . . . .	146
5) Magische Parallelepipeda . . . . .	146
Harnack, A. 1) Vereinfachung der Beweise in der Theorie der Fourier'schen Reihen . . . . .	182
2) Elemente der Differential- und Integralrechnung . . . . .	202
Harris, W. H. Solution of a question . . . . .	479
Hart, H. 1) The general equation of the $2a^2$ degree in tetrahedral coordinates . . . . .	522
2) Notes on areal coordinates . . . . .	540
Hauck, G. 1) Das graphische Rechnen . . . . .	60
2) Grundprincipien der Linearperspective . . . . .	457
3) Bemerkungen zu einer Recension . . . . .	458
Hayes, J. S. A demonstration of Maclaurin's theorem . . . . .	174
Hazzidakis, J. N. Eigenschaften der Unterdeterminanten einer symmetrischen Determinante . . . . .	125
Heal, W. E. The bitangential . . . . .	558
Heger, R. Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neun ge- gebenen Punkten . . . . .	498. 605
Heiberg, J. 1) Archimedis opera . . . . .	2
2) Philologische Studien zu griechischen Mathematikern . . . . .	5
Heilermann, H. 1) Zu den Archimedischen Näherungswerten der irrationalen Quadratwurzeln . . . . .	28
2) Lehr- und Uebungsbuch für den Unterricht in der Algebra . .	861
Heine, E. 1) Handbuch der Kugelfunctionen . . . . .	390
2) Ueber die Kugelfunction $P^n(\cos \gamma)$ für ein unendliches $n$ . . .	391























	Seite
Paige, C. Le 12) Conjugirte Involutionen . . . . .	530
13) Rapport sur un mémoire de M. De Salvert . . . . .	567
14) Note sur les courbes du troisième ordre . . . . .	598
Pánek, A. Experimentelle Bestimmung der Zahl $\pi$ . . . . .	40
Panton, A. W. The theory of equations . . . . .	62
Parmentier, G. Correspondance . . . . .	26
Pasch, M. 1) Die Umkehrung des elliptischen Integrals . . . . .	351
2) Beweis eines Satzes über projective Punktreihen . . . . .	489
3) Ueber die rationalen Curven . . . . .	530
4) Ueber ternäre Formen mit verschwindender Functionaldeterminante . . . . .	532
Paulli, H. Relationer mellem Krumming- og Torsionsradier til en vindskjæv Kurve . . . . .	587
Peano, G. Costruzione dei connessi (1,2) e (2,2) . . . . .	648
Pecquery, E. Solutions de questions . . . . .	81. 484
Pegado, L. P. da M. Estudo sobre o deslocamento de um solido invariavel no espaço . . . . .	670
Peirce, B. Linear associate algebra . . . . .	82
Peirce, C. S. On the logic of number . . . . .	55
Pellet, A. E. 1) Sur un mode de séparation des racines des équations . . . . .	74
2) Sur les fonctions irréductibles suivant un module premier . . . . .	139
3) Méthode nouvelle pour diviser le cercle en parties égales . . . . .	139
4) Sur le nombre des points multiples d'une courbe algébrique et les courbes unicursales . . . . .	512
Pelz, C. Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Axonometrie . . . . .	456
Pendlebury, C. Proof of a nine-point circle theorem . . . . .	446
Pepin, Th. 1) Classification des formes quadratiques linéaires . . . . .	98
2) Sur une équation indéterminée . . . . .	143
3) Sur les diviseurs de certaines fonctions homogènes du 3 <sup>me</sup> ordre . . . . .	147
4) Sur les surfaces osculatrices . . . . .	594
Perrot, J. 1) Sur l'infinité de la suite des nombres premiers . . . . .	133
2) Sommutation des nombres $\varphi$ . . . . .	138
Peschka, A. V. 1) Normalenfläche einer Developpabeln . . . . .	515
2) Normalenfläche einer krummen Fläche . . . . .	515
Petersen, J. 1) Om binære Formers Kovarianter . . . . .	94
2) Lehrbuch der elementaren Planimetrie . . . . .	433
3) Elementært Bevis for Desargue's Sætning . . . . .	443
Picard, E. 1) Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques . . . . .	255
2) Sur certaines équations différentielles linéaires simultanées aux dérivées partielles . . . . .	302
3) Sur la décomposition en facteurs primaires des fonctions uniformes . . . . .	316
4) Sur une courbe particulière du 3 <sup>me</sup> genre et sur certaines fonctions uniformes de deux variables indépendantes . . . . .	375
5) Expressions des coordonnées d'une courbe algébrique par des fonctions fuchsienues d'un paramètre . . . . .	376
6) Sur une classe d'intégrales abéliennes . . . . .	378
7) Intégration algébrique d'une équation analogue à l'équation d'Euler . . . . .	378
8) Réduction des intégrales Abéliennes . . . . .	378
9) Quelques exemples de réduction d'intégrales Abéliennes . . . . .	379
10) Sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann, relatif aux fonctions hypergéométriques . . . . .	389





	Seite
Řehořowský, W. Ableitung und Summirung unendlicher Reihen mit Hülfe von bestimmten Integralen . . . . .	199
Résal, H. 1) Sur la détermination de quelques intégrales indéfinies . . . . .	214
2) Sur un théorème de Pappus . . . . .	454
3) Propriétés d'une courbe qui roule sur une droite . . . . .	593
4) Théorèmes de mécanique . . . . .	700
5) Généralisation d'un théorème de Pappus . . . . .	708
6) Théorie des boulets ramés . . . . .	716
7) Recherches sur la théorie mathématique de la capillarité . . . . .	742
8) Recherches sur l'électrodynamique . . . . .	771
9) Sur la théorie de la chaleur . . . . .	824
Reusch. Die stereographische Projection . . . . .	457
Rex, F. W. Die trigonometrische Punkteinschaltung nach der Methode der kleinsten Quadrate . . . . .	837
Reye, Th. Quadratische Kugelcomplexe mit confocalen Cycliden . . . . .	504
Reynier, E. Sur le rendement des piles secondaires . . . . .	788
Ribaucour. Sur un système cyclique particulier . . . . .	493
Ricart, L. C. y Relacion entre las dos integrales Eulerianas . . . . .	219
Richelmy, P. Sulle ruote dentate . . . . .	679
Riecke, E. 1) Ueber die von einer Influenzmaschine zweiter Art gelieferte Elektrizitätsmenge . . . . .	783
2) Zur Lehre vom inducirten Magnetismus . . . . .	797
3) Ueber die Bewegung eines elektrischen Teilchens . . . . .	799
4) Messung der vom Erdmagnetismus auf einen drehbaren linearen Stromleiter ausgeübten Kraft . . . . .	801
Riess, G. Bewegung einer Flüssigkeit in einem cylindrischen Gefässe . . . . .	720
Riley, R. E. Solutions of questions . . . . .	479. 541
Ritter, A. Höhe der Atmosphäre . . . . .	822
Rive, L. de la Exercices de géométrie . . . . .	528
Roberts, R. A. 1) On the tangents drawn from a point to a nodal cubic . . . . .	532
2) A system of cartesian ovals passing through four points on a circle . . . . .	552
Roberts, S. 1) Dr. Grave's theorem on confocal conics . . . . .	43
2) Solutions of questions . . . . .	143. 679
3) On an immediate generalization of local theorems in which the generating point divides a variable linear segment in a constant ratio . . . . .	483
4) On certain tetrahedra . . . . .	496
5) On some forms of the equation of the wave surface . . . . .	628
6) On a space-locus . . . . .	642
Roberts, W. R. W. 1) On the periods of the first class of hyperelliptic integrals . . . . .	373
2) Solutions of questions . . . . .	560. 742
3) On the coordinates of a tangent line to the curve of intersection of two quadrics . . . . .	620
Rocchetti, M. Solution d'une question . . . . .	145
Rocquigny, De 1) Sur une forme du symbole $q(N)$ . . . . .	137
2) Sommes des puissances des nombres premiers et non supérieurs à N. . . . .	141
Rodenberg, C. Gipsmodelle von Flächen dritter Ordnung . . . . .	619
Rodrigues, J. M. 1) Sobre una formula d'Euler . . . . .	193
2) Sobre una formula de Wronski . . . . .	328
3) Sobre a theoria das faculdades . . . . .	329



















	Seite
Zeller, Chr. De numeris Bernoullii . . . . .	190
Zeuthen, H. G. 1) Bestemmelse af største folles Faktor til Polynomier ved Determinanter . . . . .	117
2) Théorie des figures projectives sur une surface du second ordre . . . . .	501. 517
Zimmermann, H. Ueber die Verteilung der statischen Elektrizität auf einem Conductor . . . . .	780
Zimmermann, O. Das logarithmische Potential einer gleichseitig dreieckigen Platte . . . . .	729. 786
Zimmermann, R. Henry More und die 4 <sup>te</sup> Dimension des Raumes. . . . .	51
Zmurko, L. Zur Theorie der Auflösung von Gleichungen . . . . .	71
Züge. Bewegung eines materiellen Punktes auf vorgeschriebenen Curven . . . . .	697















